Musiikin tutkimuslaitoksen julkaisusarja 1

Marcus Castrén

Joukkoteorian peruskysymyksiä

Castrén Marcus
Joukkoteorian peruskysymyksiä

ISBN 978-952-329-183-6 (PDF)
ISSN 2736-9544 (PDF)
http://urn.fi/URN:ISBN978-952-329-183-6

Musiikin tutkimuslaitoksen julkaisusarja 1

Marcus Castrén

Joukkoteorian peruskysymyksiä

Sibelius-Akatemia
Musiikin tutkimuslaitos

Musiikin tutkimuslaitoksen julkaisusarja
Sibelius-Akatemia
Töölönkatu 28
SF-00260 Helsinki
Finland

ISBN 951-95539-9-1
ISSN 0786-5325

SAATTEEKSI

Tämä esitys perustuu lisensiaattityöhöni "Intervallikko, matriisit ja sävelluokkaympyrä musiikin joukkoteorian tutkimus- ja havaintovälineenä" (Sibelius-Akatemia 1988).
Haluaisin tässä yhteydessä myös lausua parhaat kiitokseni seuraaville henkilöille:
Mikael Laursonille ja Magnus Lindbergille heidän korvaamattomasta ohjelmointiavustaan tämän esityksen ideointi- ja testausvälineenä toimineen MacSet-joukkoteoriaohjelman toteutuksessa
Eero Hämeenniemelle joukkoteoreettisen innostuksen tartuttamisesta, arvokkaiden sisältöä koskevien kommentien esittämisestä sekä työn ohjauksesta
Erkki Kurenniemelle hänen ohjauksestaan ja ideoistaan terminologiaan sekä muodollisiin esitystapoihin liittyvissä kysymyksissä
Ilkka Oramolle työn ohjauksesta.

Helsingissä joulukuussa 1988

Marcus Castrén

TIIVISTELMÄ

Tässä esityksessä tarkastellaan uusia menetelmiä useiden musiikin joukkoteoriaan liittyvien operaatioiden suorittamiseksi, sekä tutkitaan eräitä sellaisia tasavireisen säveljärjestelmän ominaisuuksia ja lainalaisuuksia, jotka ovat lähestyttävissä näiden operaatioiden tuottamien tulosten kautta.
Tarvittava käsitteistö on osaksi joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa jo esiteltyä, osaksi tästä käsitteistöstä edelleenkehiteltyä ja osaksi kokonaan uutta. Tärkeimmän lähtökohdan muodostaa intervallikon käsite. Sen tukena sekä myös itsenäisinä välineinä käytetään erityyppisiä matriiseja sekä sävelluokkaympyrää.

Johdantoluvussa (*Aluksi*) tarkastellaan kysymyksiä, jotka liittyvät joukkoteorian ja perinteisen musiikinteorian välisiin suhteisiin, joukkoteorian eräisiin yleisiin sisäisiin ominaisuuksiin sekä sen asemaan, käyttötarkoituksiin, ATK-sovellutuksiin ja tulevaisuudennäkymiin. Lisäksi käsitellään lyhyesti seikkoja, jotka johtivat tämän esityksen muotoutumiseen nykyiselleen.

Käsitteistöä -luvussa määritellään tarvittavia peruskäsitteitä ja -operaatioita. Tämän esityksen tarpeisiin kehitettyä materiaalia edustavat mm. intervallikkojen vakio- ja käänteisosien määrittely, uusi normaalijärjestyskriteeristö, rakenteen, instanssin ja instanssiluokan käsitteet, instanssimatriisit sekä käänteissuhteiden tarkastelu intervallikkoja ja käänteisakseleita apuna käyttäen. Lisäksi tarkastellaan joukon jäsenten välisen järjestyksen kysymyksiä ja joukkoluokkien muodostukseen vaikuttavia tekijöitä.

Intervalliavaruudelliset symmetriat -luvussa symmetriset joukkoluokat jaotellaan käänteis- ja kiertosymmetrioihin, todetaan symmetriatyyppien mahdollinen päällekkäisyys sekä luokitellaan akseleilla varustetut symmetriat akselien lukumäärien perusteella. Symmetriatyyppien tunnistaminen esitetään sekä intervallikkojen että sävelluokkaympyrälle sijoitettujen joukkojen avulla. Intervallikkojen avulla tutkitaan tietyn jaksollisuuden omaavien kiertosymmetristen joukkoluokkien määriin vaikuttavia tekijöitä.
Symmetrisiä joukkoja tarkastellaan käsiteparin kehys-akseli avulla, jakaen akselityypit kategorioihin ja esittäen akselityyppien vaikutukset joukkojen rekisteriavaruudelliseen käyttäytymiseen. Tietyntyyppiset symmetriat yhdistetään perheiksi yhteisen kehyksen avulla. Komplementtiluokkien suhde symmetrisyyteen selvitetään. Joukkoluokan symmetrisyyden ja jäsenjoukkojen lukumäärän välinen yhteys todetaan ja havainnollistetaan vertailemalla instanssi- ja jäsenjoukkomatriiseja.

Osajoukot ja -joukkoluokat -luvussa esitetään osajoukko- ja osajoukkoluokkasuhteen toteaminen intervallikon avulla sekä operoiminen vajailla intervallikoilla. Osajoukko- ja osajoukkoluokkasuhteen eroja tarkastellaan lyhyesti.

Ali-intervallikkojen muodostumista tutkitaan yli-intervallikkojen jäsenten yhdistymistapoja kuvaavien mallien avulla, ja esitetään intervallikkopohjainen metodi joukkoluokan kaikkien osa- ja ylijoukkoluokkien selvittämiseksi. Erikokoisten joukkojen osa- ja ylijoukkojen lukumäärät selvitetään, samoin tietynkokoisten joukkoluokkien osa- ja ylijoukkoluokkasuhteiden lukumäärät.

Kiertosymmetristen joukkoluokkien osajoukkoluokkasuhteiden poikkeuksellisuus todetaan, ja esitetään jaksollisuuteen perustuvat metodit, joiden avulla tietyn tunnetun osajoukkoluokkasuhdeasetelman käänteisasetelman tuottamat osajoukkoluokkasuhteet selviävät suoraan. Lopuksi tarkastellaan osainstanssiluokka- ja osajoukkoluokkasuhteiden eroavaisuuksia.

Leikkausvektorit -luvussa esitetään leikkausvektorin periaate ja tarkastellaan joukkoluokan jäsenjoukkojen sisäisiä sekä kahden joukkoluokan jäsenjoukkojen välisiä leikkauksia erityyppisten leikkausmatriisien avulla. Apukäsitteiksi määritellään X- ja Y-joukot, joiden avulla kaikkia leikkausasetelmia voidaan käsitellä yhdenmukaisesti.

Matriisien lisäksi esitellään muita tapoja erityyppisten leikkausvektorien muodostamiseksi, ja tutkitaan vektoreille yhteisiä sekä niitä erottavia tekijöitä. X- ja/tai Y-joukkojen transponoimisesta ja /tai kääntämisestä vektoreille aiheutuvat muutokset selvitetään, ja lopuksi tarkastellaan symmetristen joukkoluokkien leikkausvektorien erityispiirteitä.

Komplementtijoukot ja -joukkoluokat -luvun alussa määritellään tarvittavaa käsitteistöä ja tutkitaan tässä esityksessä käytetyn joukkoluokituksen sekä Forten joukkoluokituksen välisiä eroja niiden suhteissa komplementti- ja käänteiskomplementtiluokkiin. Lisäksi tarkastellaan joukosta ja sen komplementtijoukosta sekä joukkoluokasta ja sen komplementtiluokasta muodostettujen tietyntyyppisten vektorien suhteita, sekä komplementtiluokkien ja käänteiskomplementtiluokkien osajoukkoluokkasuhteita. Lopuksi esitetään metodi komplementti-intervallikon määrittämiseksi intervallikosta.

SISÄLLYSLUETTELO

ALUKSI

1. KÄSITTEISTÖÄ

2. INTERVALLIAVARUUDELLISET SYMMETRIAT

3.OSAJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

4.LEIKKAUSVEKTORIT

5. KOMPLEMENTTIJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

ALUKSI

Perusteellisiin teoreettisiin valmiuksiin tähtäävässä koulutuksessa musiikinopiskelijan odotetaan harjoitustöin ja analyysein perehtyvän moniin enemmän tai vähemmän kiinteästi satsitekniikkaan liittyviin näkökulmiin, kuten harmoniaan, kontrapunktiin, motiviikkaan, melodiikkaan, kenraalibassoon, rytmiikkaan, muodontaan jne., päämääränään tarkoituksenmukaisen käsityötaidon hankkiminen myöhempiä työtehtäviä varten.
Useissa näistä teorian osa-alueista tulee vastaan tilanteita, joissa säveltasomateriaalia tarkastellaan etupäässä sen *sävelluokkasisällön* (sävelpaikka-, sävelyys-, sävelnimisisällön) kannalta. Tietyn sointumuodostelman tai linjan elementtien keskinäinen järjestys tai rekisteriavaruudellinen sijainti ei ole keskeinen, vaan se, mitkä tasavireisen säveljärjestelmän kahdestatoista eri oktaavikerrannaisryhmästä ovat tutkittavassa yksikössä edustettuina.
Perinteisessä satsitekniikassa ei sävelluokkia varten ole kuitenkaan formuloitu omaa teoriaansa, perustettu omaa oppiainettaan tai edes kiinnitetty niihin järjestelmällisempää huomiota. Niiden tarjoama informaatio on otettu esille muiden näkökulmien oheen ainoastaan tarpeen vaatiessa, ilman aietta paneutua lähemmin sävelluokkien tason sisäisiin ominaisuuksiin sinänsä.
Tämä johtuu epäilemättä siitä, että tonaalisen musiikin lainalaisuuksista nousseessa teoriassa sävelluokkien aspektia ei ole yksinkertaisesti tarvittu, sillä muut kontrollimenetelmät ovat taanneet riittävän tiukan otteen satsiin. Duuri- ja mollikolmisoinnut ovat muodostaneet harmonian rungon, joten hyödynnetyt sointutyypit eivät itsessään ole välttämättä edellyttäneet tutkimus- luokittelu- tms. toimenpiteitä.
1900-luvun musiikin kanssa on tilanne toinen, sitä suuremmassa määrin mitä lähemmäksi nykypäivää tullaan. Mahdollisia sävelvalinnallisia asetelmia on paljon, eikä mikään lähtökohta ole automaattisesti poissuljettu jonkin yleisesti hyväksytyn tyylillisen tai esteettisen normin nojalla. Ja koska musiikillisen materiaalin teknisten kontrollikeinojen kehittyminen voimakkaan muutosprosessin alaisten taiteellisten katsantokantojen myötä lienee välttämätöntä, on perusteltua tutkia, onko jollakin perinteisessä musiikinteoriassa matalaa profiilia pitäneellä aspektilla tarjottavanaan uusien asetelmien kannalta käyttökelpoisia näkökulmia.
Tasavireisen järjestelmän sävelluokkien taso on eräs tällainen tutkimisen arvoinen kokonaisuus. Aikamme musiikista kiinnostuneen ei ole syytä laiminlyödä sitä vain sen vuoksi, että se ei kenties ole ollut valovoimainen tekijä tonaalisen musiikin synnyttämän teorian kentässä. Hyvä kontakti sävelluokkien teoriaan on muusikolle joka tapauksessa hyödyllisempi kuin huono, ja ennenkaikkea se on hyödyllisempi kuin ei kontaktia lainkaan. Tässä esityksessä käsiteltävä musiikin joukkoteoria on mielestäni tehokas sävelluokkien teoria, jonka avulla voi saada eksaktia tietoa lukuisista erityyppisistä kysymyksenasetteluista.

Tilanteessa jossa kaikki säveltasokombinaatiot tulevat ainakin periaatteessa kysymykseen sävelteoksen materiaalina, ollaan monien seikkojen osalta kaukana niistä musiikillisista olosuhteista, jotka tuottivat esimerkiksi tonaalisen harmoniaopin eri muodoissaan ja vaiheissaan. Tämän harmoniaopin muodostaessa itsestäänselvän perustan myös opinnoille jotka tähtäävät oman aikamme musiikin soinnullisten ilmiöiden hallintaan, on kiinnostavaa pohtia missä määrin tonaalisen ympäristön itselleen hahmottamat harmonioiden ominaisuuksien tärkeysjärjestykset periytyvät tiedostamattomasti nykymusiikin muuttuneisiin olosuhteisiin. Toisinsanoen jos tonaalisessa ympäristössä on välttämätöntä kiinnittää huomiota seikkaan x, suotavaa kiinnittää huomiota seikkaan y ja tarpeetonta kiinnittää huomiota seikkaan z, niin miten tämä vaikuttaa meihin tutkiessamme nykymusiikin harmonista ympäristöä ja sen ominaisuuksien mahdollisia tärkeysjärjestyksiä: jääkö z liian vähälle huomiolle, saako x enemmän huomiota kuin olisi tarpeen.

Otan yksinkertaisen esimerkin. Erityyppisiä sointurakenteita nimitetään usein niiden vierekkäisten sävelten väleihin muodostuvan rinnakkaisten intervallien ketjun ominaisuuksien perusteella: kvarttisointu, kvarttitritonussointu, piensekunticluster, kokosävelasteikko, kokopuoliasteikko, erilaiset "suuret terssirakenteet" jne. Tämän ohella intervalliketjun mahdolliset säännönmukaisuudet saatetaan usein mainita ikäänkuin keskeisenä osana sointutyypin identiteettiä: ylinouseva kolmisointu rakentuu kahdesta päällekkäisestä suuresta terssistä, vähennetty septimisointu kolmesta päällekkäisestä pienestä terssistä jne.

Oletetaan tämän jälkeen tilanne, jossa tuotetaan satsia kontrolloiden harmonioita rinnakkaisten intervallien ketjujen avulla, tai analyysitilanne jossa kuvaillaan teoksen harmonioita vastaavaa aspektia hyväksikäyttäen. Tällöin tietystä 3-jäsenisestä säveltasokombinaatiosta huomataan, että sen 2-jäsenisen rinnakkaisten intervallien ketjun ja sen kolmesta intervallista koostuvan *kokonaisintervallisisällön* välillä vallitsee läheinen yhteys. Ketjun avulla voidaan varsin kattavasti kuvata kokonaisintervallisisältöä, ja lisäksi puuttuva kolmas, äärijäsenten välinen intervalli selviää helposti laskemalla vierekkäiset intervallit yhteen. 4-jäsenisen säveltasokombinaation intervalliketjussa puolestaan on 3 intervallia, kokonaisintervallisisällössä 6. Puolet intervalleista syntyy ei-rinnakkaisten säveltasojen välille, joten ketju kuvaa kokonaisintervallisisältöä huonommin kuin äsken. 5-jäsenisen säveltasokombinaation intervalliketjussa on 4 intervallia, kokonaisintervallisisällössä 10. 6-jäsenisen säveltasokombinaation intervalliketjussa on 5 intervallia, kokonaisintervallisisällössä 15. 7-jäsenisen kombinaation kohdalla vastaavat intervallimäärät ovat 6 ja 21, 8-jäsenisen kohdalla 7 ja 28, 9-jäsenisen 8 ja 36, 10-jäsenisen 9 ja 45 jne.

Toisinsanoen rinnakkaisten intervallien määrän ja intervallien kokonaismäärän välinen suhde ei ole vakio. Mitä suuremmaksi kombinaation jäsenmäärä kasvaa, sitä pienempää osaa koko intervallirakenteesta rinnakkaisten intervallien ketju edustaa, ja sitä mutkikkaampaa on osoittaa sen keskeisellä tavalla määrittävän kombinaation identiteettiä. Kokonaisintervallisisällön käsite näyttäisi tällöin vastavuoroisesti nousevan esiin, mutta sitä ei kuitenkaan näe käytettävän harmonioiden prosessoinnin aktiivisena parametrina. Ainakin osaksi näkisin syyn olevan juuri tonaalisen harmonian perinnössä. Kolmisoinnuilla operoitaessa kokonaisintervallisisältö on toisarvoinen käsite.

JOUKKOTEORIAN TEHTÄVISTÄ

Osa joukkoteoreettisista teksteistä koostuu teosanalyyseistä, osa itse teoriaan liittyvien seikkojen esittelystä, tarkastelusta ja edelleenkehittelystä. Jälkimmäisissäkin tapauksissa on analyyttinen aspekti usein tärkeällä sijalla: tietyn uudentyyppisen operaation tai näkökulman mielekkyyttä saatetaan perustella ja testata sen tarjoamien analyyttisten havaintojen avulla jne. Analyysihakuisuudessa sinänsä ei luonnollisestikaan ole mitään tavatonta, sillä analyysimetodiksihan joukkoteoria itse asiassa alunperin kehitettiinkin, tarjoamaan väline ei-tonaalisen musiikin, varsinkin Schönbergin ja Webernin atonaalisen kauden tuotannon tutkimiselle.

Joukkoteorialle voidaan kuitenkin osoittaa myös aivan toisentyyppinen käyttötarkoitus, jonka ainakin omalta osaltani koen vähintään yhtä mielenkiintoiseksi ja tuloksiltaan ilman muuta vähemmän moniselitteiseksi kuin käytön analyysimetodina. Joukkoteoria voidaan nähdä eräänlaisena säveljärjestelmän ilmiöiden ja lainalaisuuksien havaintomenetelmänä, tapana tutkia tarkoin tunnetuissa "laboratorio-olosuhteissa" muualta musiikinteoriasta tutuiksi tulleita käsitteitä. Sen avulla voidaan saada konkreettinen ote joihinkin asioihin, jotka ovat perinteisen teorian keinoin tarkasteltuina hukkuneet suureen tapauksien paljouteen tai tuntuneet muutoin vaikeasti miellettäviltä tai rajoiltaan hämäriltä; sen avulla voidaan tarkastella tiettyjä koko sävelavaruuden aspekteja yhtaikaisesti; se tarjoaa näkökulman esimerkiksi kokonaisintervallisisältöihin, transponoituvuuteen, symmetrioihin, käänteisyyteen, leikkauksiin, osajoukkosuhteisiin, komplementteihin ja lukuisiin muihin vastaaviin seikkoihin, jotka muodossa tai toisessa, nimellä tai toisella tulevat vastaan useimmissa teorianmuodostukseen, säveltämiseen tai analyysiin liittyvissä tehtävissä.

Minusta tämä yksinkertaisesti riittää yhdeltä teorialta. Uskon myös saavutetun hyödyn olevan mielekkäässä suhteessa käytettyyn työpanokseen. Joukkoteoriaan sisälle pääseminen koetaan usein hieman visaiseksi - päällimmäisinä ovat motivaatio-ongelmat - mutta alkeiden tultua omaksutuiksi ei jatko ole sen vaikeampaa kuin mikään muukaan teoria.

JOUKKOTEOREETTISEN TIEDONKERUUN LUONNE

Muusikkojen kanssa käymieni keskusteluiden yhteydessä olen usein pannut merkille, että joukkoteorialta perätään olemassaolonsa oikeutukseksi ansioluetteloa. Yhtäältä tiedustellaan teosanalyysejä, joissa on joukkoteorian keinoin kyetty valaisemaan muiden metodien kannalta vaikeasti lähestyttäviä materiaalin tasoja. Toisaalta pyydetään mainitsemaan sävelteoksia, joiden muotoutumiseen joukkoteoria on vaikuttanut. Tämä on tietenkin aivan oikein. Uusiin näkökulmiin tulee suhtautua avoimin mielin mutta myös terveellä varauksella, kunnes niistä ajan myötä saadaan kootuksi riittävän moniin erityyppisiin kokemuksiin tukeutuva kokonaiskuva.

Kaikesta huolimatta koen vaateen näyttävistä taiteellis-analyyttisistä tuloksista tietyllä tavalla hieman asian viereen osuneeksi. Koitan seuraavassa perustella miksi.

Oletetaan joukkoteoreettisia menetelmiä hyödyntävä analyysitilanne, jossa on tarkasteltavana vaikkapa kahdesta vierekkäisestä soinnusta muodostetut joukot. Niistä voidaan selvittää sävelluokkien määrät, joukkoluokat, intervallikot, erityyppiset leikkausvektorit, mahdollinen käänteisyys tai komplementtisuus, osajoukko- ja osajoukkoluokkasuhteet, symmetriatyypit, suhde lukuisiin erilaisiin joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa esiteltyihin läheisyyden kriteereihin jne. Kaikki havainnot olisivat ehdottoman eksakteja.

Kun työ olisi tehty, minkälaista kuvausvoimaa voitaisiin olettaa saavutetulla informaatiolla olevan koko analysoitavaan materiaaliin nähden? Lienee varsin selvää, ettei juuri minkäänlaista. Jotta päästäisiin mielekkäisiin tuloksiin, olisi ensinnäkin koko tutkimuskohteen säveltasomateriaali ositettava joukoiksi ja tutkittava kustakin joukosta kaikki mainitut aspektit. Tällöin oltaisiin saavutettu mielekäs *lähtötilanne*.

Tämän jälkeen alkaisi varsinainen työ, joka voisi jälleen pitää sisällään lukuisia näkökulmia. Voidaanko kokonaisintervallisisältöjen avulla osoittaa jokin prosessi tai tendenssi harmoniassa? Voidaanko leikkauksien avulla osoittaa säveltäjän käyttäneen jotain tiettyä sävelvalinnallista periaatetta? Onko symmetristen joukkoluokkien R-avaruudellisissa asetteluissa tapahtuvien muutosten selvillä säännönmukaisuuksilla merkitystä? Viittaavatko joukkojen intervallikoissa esiintyvät samankaltaisuudet tiettyyn suuntaan? Mikä on joukkojen välillä selvästi osoitettavan määrätynlaisen osajoukkosuhteiston merkitys? Löytyykö tietyn poikkeuksellisen ominaisuuden omaavien heksakordien runsaalle käytölle luonteva selitys? Miten nämä kaikki näkökulmat suhteutuvat toisiinsa? Mikä on kulloinkin dominoiva aspekti ja miksi? Jne.

Tällöin saattaa analyytikko todeta olevansa tilanteessa, jossa työmäärä on paisunut niin suureksi että kynän ja paperin teknologialla varustettuna hänellä ei ole mahdollisuuksia eikä todennäköisesti haluakaan tehtävän loppuunsaattamiseksi. Vastaavia asetelmia tulee epäilemättä eteen muunkin kuin analyysin yhteydessä. Säveltäjä törmännee samansuuntaisiin ongelmiin pyrkiessään joukkoteoreettisin keinoin käsivaraisesti hahmottamaan suurimuotoisen teoksen säveltasorakenteen monia piirteitä, ja yhtälailla materiaalin kinostuminen koskee teorianmuodostusta.

Lyhyesti sanottuna joukkoteoria ei lopu kesken mutta joukkoteoreetikko loppuu. Tässä on nimenomaan se syy miksi näen tällä hetkellä joukkoteorian pikemminkin sävelavaruuden "karttana ja kompassina" kuin suurten materiaalimäärien aktiiviseen prosessointiin suoraan soveltuvana menetelmänä. Siihen tulisi malttaa asennoitua jonkinlaisena perustutkimuksena, jonka päällimmäisin tarkoituskaan ei ole tarjota patenttiratkaisuja erilaisiin säveltaso-organisaatioon liittyviin kysymyksiin tai tehdä muita näkökulmia tarpeettomiksi. Jos sen metodit sitten alkavat muusikkoa arkityöskentelyssä pikkuhiljaa hyödyttää - niinkuin epäilemättä alkavat - niin aina parempi.

Monet joukkoteoriaa kohtaan tunnetut epäilykset ja sen osakseen saamat arvostelut liittyvät juuri informaation nopeaan kasautumiseen. Useimmiten kritikoijat eivät tosin osaa kohdistaa arvosteluaan tähän osoitteeseen, vaan he tuomitsevat varmuuden vuoksi koko teorian. Joukkoteoreettinen kirjallisuus puolestaan on näistä kysymyksistä hiljaa.

Kun muusikot kritikoivat joukkoteoriaa, he ovat siis usein oikeassa, mutta väärästä syystä. Kyseessä on eräänlainen "ei pidä peiliä syyttää jos naama on vino" -asetelma. Se että joukkoteoria tuottaa omalla tavallaan suuria määriä eksakteja informaationjyväsiä on asia numero yksi. Se millä nopeudella tai tehokkuudella tätä informaatiota kyetään käsivaraisin menetelmin seulomaan on täysin erillinen asia numero kaksi, joka ei joukkoteorian olemusta sinänsä muuta puoleen eikä toiseen.

JOUKKOTEORIAN ATK-SOVELLUTUKSET

Minulla on ollut muutaman vuoden käytössäni keskeisistä joukkoteoreettisista operaatioista suoriutuva tietokoneohjelma. Tietokoneavusteisuus on muuttanut työskentelyn luonteen ja asennoitumisen joukkoteoriaan kokonaan toiseksi. Vähiten miellyttävät työvaiheet, kuten laskutoimitusten mekaaninen suorittaminen, taulukkojen muodostaminen jne. ovat jääneet lähes kokonaan pois, ja käsivaraisen työskentelyn varsin suureksi osoittautunut virhemarginaali on uskoakseni olennaisesti kaventunut. Toimenpiteiden suoritusnopeuden kasvaessa merkittävästi on informaatiovirrasta noussut esiin aiemmin huomaamatta jääneitä säännönmukaisuuksia tai muita silmiinpistäviä seikkoja, joista puolestaan on rakentunut uusia havaintoja. Olen vakuuttunut, että joukkoteorian opintojen on edullista siirtyä tietokoneavusteisiksi niin varhaisessa vaiheessa kuin mahdollista.

Perusoperaatioiden siirtäminen tietokoneen suoritettavaksi on kuitenkin vasta ensimmäinen askel. Varsinaiset haasteet tullaan kohtaamaan korkeammilla tasoilla, hyvin suuria informaatiomääriä ja lukuisia erilaisia materiaalin lähestymistapoja sisältäviä asetelmia käsiteltäessä. Tehokkaiden ATK-sovellutusten kehittäminen on joukkoteorialle äärimmäisen tärkeää, sillä juuri niiden avulla se voi aktivoitua nykyisestä asemastaan hyödyllisenä musiikillisena yleissivistyksenä käyttökelpoiseksi säveltasoparametrin prosessointimenetelmäksi.

Tilannetta voidaan tarkastella myös päinvastaiselta suunnalta, tietokoneista kohden joukkoteoriaa. Tähänastiselle tietokoneavusteiselle musiikille ja varsinaiselle tietokonemusiikille on ollut sangen usein ominaista, että sen säveltaso-organisaatiota ovat säädelleet muut kuin traditiosidonnaisemman, "notaationvaraisen" nykymusiikin satsitekniset keinovarat. Tietokoneen ja perinteisen satsitekniikan väliltä puuttuu silta, yleispätevä liittymä joka olisi muidenkin kuin tietotekniikkaan perehtyneiden muusikkojen ulottuvilla ja joka ei rakenteellisten ominaisuuksiensa vuoksi tyrkyttäisi käyttäjälleen tiettyä yksittäistä lähestymistapaa tai estetiikkaa. Tämä puutehan rajaa tällä hetkellä ATK:n ulkopuolelle esimerkiksi sen laajan säveltäjien joukon, joka olisi periaatteessa valmis hyödyntämään tietokonetta, jos valmisohjelmakannan tarjoamat mahdollisuudet olisivat suurin piirteinkään samansuuntaiset heidän kiinnostustensa kanssa.

ATK:n ja perinteisen sävellystekniikan välisen liittymän luomista tai ainakin näiden asioiden lähentämistä toisiinsa tullaan lähitulevaisuudessa epäilemättä tutkimaan lukuisista erityyppisistä lähtökohdista käsin. Järjestelmällisyytensä vuoksi joukkoteoria saattaa olla hyvinkin varteenotettava osatekijä tässä työssä. Omasta mielestäni tämä on joukkoteorian tärkein ja kiinnostavin haaste.

TÄMÄN ESITYKSEN TAVOITTEET

Lisensiaattityöni oli ensimmäisessä suunnitteluvaiheessaan määrä keskittyä joukkoteoreettisiin menetelmin suoritettavaan teosanalyysiin. Taustamateriaalia kerätessäni kiintyi huomioni kuitenkin useissa lähteissä käytetyn ja tapauksesta riippuen hieman eri lailla painotetun ***intervallikon*** käsitteen mahdollisuuksiin toimia eräänlaisena joukkoteoreettisten operaatioiden tuki- tai lähtöpisteenä. Löysin eräitä tapoja suorittaa intervallikon avulla toimenpiteitä, jotka joukkoteorian teksteissä on toteutettu muilla keinoin. Pidettyäni intervallikkolähtöisiä keinoja havainnollisempina ja nopeampina, päätin tutkia missä laajuudessa ja kuinka käyttökelpoisesti intervallikkoa voitaisiin hyödyntää.

Analyysi jäi ja tilalle tuli analyyttisen välineen kehittäminen. Intervallikkopohjaisten metodien havainnollistamiseksi otin käyttöön erilaisia visuaalisia esitystapoja, kuten perinteisen kvinttiympyrän joukkoteoreettisen muunnoksen, *sävelluokkaympyrän*, jota monet muutkin kirjoittajat ovat käyttäneet, sekä erityyppisiä *matriiseja*.

Kehitellessäni niitä ja niille perustuvia operaatioita huomasin, että havaintovälineeni ovat itsenäistyneet ja nousseet lähes yhtä keskeiseen asemaan kuin seikka jota niiden oli määrä havainnollistaa. Näinollen näkökulma laajeni hieman. Yhden joukkoteorian operaatioita nopeuttavan ja selkiinnyttävän käsitteen, intervallikon, sijasta esityksessä tarkastellaan joukkoa käsitteitä, jotka tukevat ja täydentävät toisiaan. Lopullisessakin versiossa intervallikot muodostavat kuitenkin materiaalin rungon.

Esityksessä on lomittain kaksi eri tasoa. Niistä ensimmäisen muodostavat havaintovälineiden ja niiden avulla muodostettujen uusien operaatioiden esittelyt esimerkkeineen. Jotkut operaatioista hyödyntävät havaintovälineistä vain yhtä, jotkut useampia. Osa toimenpiteistä on aivan uudentyyppisiä, muutamien ollessa eräänlaisia jatkotoimenpiteitä menetelmille joita muut joukkoteoreetikot ovat käyttäneet tai joihin he viittaavat.

Tämän materiaalin päälle rakentuu toinen taso, jossa tarkastellaan laajempia joukkoteoreettisia ilmiöitä ja kokonaisuuksia, käyttäen hyväksi sekä havaintovälineitä itseään että niiden avulla muodostettujen operaatioiden tuloksia.

1. KÄSITTEISTÖÄ

1.1. TASAVIREISTEN SÄVELTASOKOMBINAATIOIDEN MÄÄRÄ

Tasavireinen asteikko alkaa teoriassa äärettömän läheltä 0 Hz:ä ja jatkuu äärettömän korkealle. Kuuloalue rajaa asteikosta kymmenisen oktaavia käsittävän kaistan, soitinten äänialueiden rajatessa puolestaan eräänlaiseksi musiikin aktiivialueeksi vielä hieman kapeamman osan.

Normaalista 88 koskettimella varustetusta pianosta voidaan muodostaa (2^{88})-1 erilaista säveltasokombinaatiota, tai mikäli tyhjä joukko (säveltasokombinaatio) lasketaan mukaan, 2^{88}. Luku 2^{88} on toisin ilmaistuna 309485000000000000000000000000000.

Nopeimmat tietokoneet tekevät tällä hetkellä hieman toista miljardia konekielikäskyä sekunnissa. Jos tämän nopeuden omaavalla tietokoneella päätettäisiin listata koneen muistiin kaikki pianon 2^{88} säveltasokombinaatiota, veisi tehtävän loppuunsaattaminen useita kymmeniä miljardeja vuosia.

Toisinsanoen erilaisia tasavireisiä säveltasoyhdistelmiä on niin paljon, että niiden pelkän lukumäärän mieltäminen on ihmistajunnan ulottumattomissa oleva tehtävä, minkäänlaisesta yksityiskohtaisemmasta luokittelusta tai jäsentämisestä puhumattakaan.

Tästä seuraa, että tasavireisen säveljärjestelmän kaikkien mahdollisten yhdistelmien joukon tai jonkin sen osajoukon ominaisuuksien tarkastelussa tai saattamisessa edes likimain tajuttavalle tasolle - kontrollinalaiseksi eri musiikillisissa yhteyksissä - on rajauksilla, yleistyksillä, pelkistyksillä, toisiaan muistuttavien ominaisuuksien samuuden oletuksilla ja muilla sopimuksenvaraisten kriteereiden valossa tapahtuvilla kokonaisuuksien tarkasteluilla keskeinen osuus. Jokainen säveltasoyhdistelmä on viime kädessä vain itsensä kaltainen, ja kaikki analyyttiset huomiot eri säveltasoyhdistelmistä muodostuvien verkostojen lainalaisuuksista edellyttävät jonkinlaisten yhteisten tunnusmerkkien olemassaolon hyväksymistä, olivatpa ne sitten materiaalista nousevia tai etukäteen lukkoonlyötyjä, abstrakteja tai konkreettisia.

1. 2. YLEISTÄ KÄSITTEISTÖÄ

Joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa - joka on lähestulkoon kokonaisuudessaan englanninkielistä - vallitsee terminologinen yksimielisyys valitettavan harvasta asiasta. Samalle asialle saatetaan antaa useita nimiä, ja useilla eri asioilla saattaa olla sama nimi. Seuraavassa on tarkoitus määritellä lyhyesti keskeistä käsitteistöä ja terminologiaa englanninkielisine vastineineen, perustella toisistaan poikkeavien määritelmien tapauksissa jonkin vaihtoehdon valinta sekä esitellä uutta käsitteistöä tämän esityksen tarpeisiin.

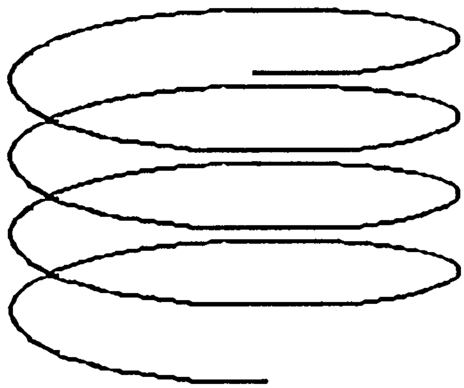
1. 2.1. REKISTERI- JA INTERVALLIAVARUUS

Tasavireisestä säveljärjestelmästä voidaan erotella kaksi erilaista tasoa. Toinen on lineaarisesti alhaalta ylös/ylhäältä alas etenevä taso. Kulkusuunnasta riippuen jokainen sävel on aina korkeampi/matalampi kuin edelliset ja matalampi/korkeampi kuin seuraavat. Joukkoteoriassa tälle säveljärjestelmän tasolle on annettu nimitys *rekisteriavaruus* eli *R-avaruus* (engl. register space, R-space).

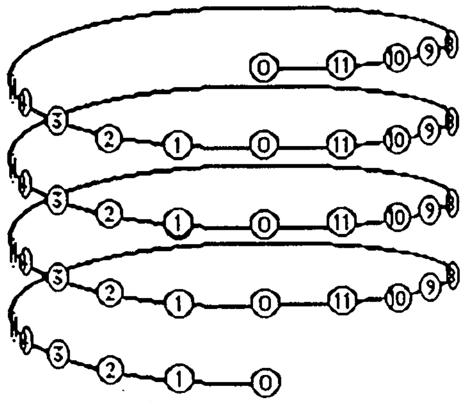
Toinen taso on ainoastaan 12-jäseninen, itseensäkiertyvä taso. Mielivaltaisesta säveltasosta edettäessä päädytään yhä uudelleen sen oktaavikerrannaisiin, joilla mielletään olevan keskenään voimakas kuulohavainnollinen samuus. Kukin säveltaso muodostaa oktaavikerrannaistensa kanssa kokonaisuuden, jonka identiteetin kannalta rekisterin merkitys on vähäinen tai olematon: on mahdotonta määritellä ovatko kaikki c-sävelet korkeammalla vai matalammalla kuin kaikki fis-sävelet jne. Tämän syklisen säveljärjestelmän tason nimi on joukkoteoriassa *intervalliavaruus* eli *I-avaruus* (interval space, I-space).

Säveljärjestelmän kaksitasoisuutta kuvaava avaruudellinen objekti on esimerkiksi pystyyn asetettu vieteri tai kierreportaat.[1] (Esim 1 a). Vieterin kukin täysi kierros on jaettu kahteentoista tasaväliseen osaan. Allekkain olevat kohdat - säveltasot - ovat oktaavin päässä toisistaan, joten kohtisuoraan vieterin kylkeen ajateltu suora yhdistää tietyn sävelen oktaavikerrannaisiinsa. (Esim. 1 b).

Esim 1 a



Esim 1 b

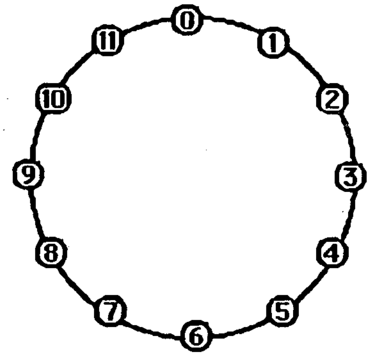


Hyvin epämuodollisesti voitaisiin ajatella,että joukkoteoria on "säveljärjestelmävieterin" tarkastelua ylhäältä käsin. Tällöin vieterin eri syklit jäävät näkymättömiin ja tuloksena on 12-yksikköinen ympyrä,kuin kellotaulu. Tutkimuksen kohteeksi muodostuvat kellotaulun yksiköt, niiden muodostamat kombinaatiot ja ja kombinaatioiden väliset suhteet.

1. 2. 2. SÄVELLUOKKAYMPYRÄ

Kellotaulu on nimeltään *sävelluokkaympyrä* tai lyhyemmin vain *ympyrä*. (Esim.2).

Esim 2



Sävelluokkaympyrän varhaisempi muoto on perinteinen kvinttiympyrä, jota jotkut varhaiset joukkoteoreetikot, kuten Howard Hanson, vielä johdonmukaisesti käyttivät.[2]

1.2.3. SÄVEL, SÄVELLUOKKA

Käsitteellä *sävel* (pitch) on joukkoteoriassa samanlainen merkitys kuin perinteisessäkin musiikinteoriassa. Kukin sävel määrittää yhden "paikan" (tasavireisessä) sävelavaruudessa.

Sävelluokka tai lyhennettynä vain *sl* (pitch-class, pc) on joukko jonka alkioina ovat enharmonisesti identtiset ja/tai yhden tai useamman oktaavin päässä toisistaan olevat sävelet.[3] Toisistaan yhden tai useamman oktaavin päässä olevien säveltasojen samuuden oletuksen perustana on ns. *oktaaviekvivalenssin aksiooma*.[4]

Sävelluokkia on kaikkiaan kaksitoista. Erään sävelluokan muodostavat keskenään esimerkiksi kaikki c-, his- ja deses-sävelet, toisen kaikki cis- ja des-sävelet, kolmannen kaikki d-, cisis- ja eses-sävelet jne.

Sävelluokka tulkitaan rekisteriltään määrittelemättömäksi (registrally indeterminate).[5] Sävelluokkaympyrän kukin numero edustaa yhtä sävelluokkaa.

1. 2.4. NUMERONOTAATIO, MODULO-12 -ARITMETIIKKA

Säveliä ja sävelluokkia merkitään joukkoteoriassa useimmiten nuottinimien sijasta kokonaisluvuin. Tätä toimenpidettä sanotaan *numeronotaatioksi* (integer notation, tarkkaan ottaen siis kokonaislukunotaatio). Tarkoituksena on saattaa säveltaso- tai sävelluokkamateriaali muotoon, jossa matemaattisten operaatioiden soveltaminen siihen on vaivatonta ja jossa enharmoniset vastineet saavat yhdenmukaisen asun. Enharmonisten sävelten samuuden oletuksen lisäksi numeronotaation edellytyksinä ovat kromaattisuus - numerointi ei tapahdu diatonisesti kuten joissakin perinteisen teorian operaatioissa - sekä tasavireisyys.

Rekisteriavaruudelliset sävelet merkitään kokonaisluvuilla valitsemalla jokin sävel nollaksi ja numeroimalla siitä lähtien ylöspäiset sävelet positiivisin ja alaspäiset sävelet negatiivisin kokonaisluvuin. Nollan valinta numeronotaatiossa on mielivaltainen, mutta useissa esityksissä on muodostunut käytännöksi valita nollaksi 1-viivainen c.

Intervalliavaruuden 12 sävelluokkaa merkitään numeroilla 0,1,2... 11. (Joissakin esityksissä 10=A ja 11=B tai 10=t ja 11=e. Tässä esityksessä käytetään pelkästään numeroita 10 ja 11). Kuten rekisteriavaruudessakin, on nollan valinta mielivaltainen. Rivitekniikkaa käyttävän musiikin kyseessäollessa on usein tapana merkitä rivin perusmuodon ensimmäistä sävelluokkaa nollalla. Yhtälailla yleisessä ns. *fixed zero-* notaatiossa määritellään numerointi aina siten, että c=0, cis/des=1, d=2, dis/es=3 jne. Tässä esityksessä käytetään pelkästään fixed zero-notaatiota. Sävelluokkaympyrässä täten 0=c, 1=cis/des, 6= fis/ges, 10=ais/b jne.

Rekisteriavaruudellisten sävelten saatua numeroarvonsa voidaan ns. *modulo 12* -aritmetiikan keinoin määritellä, mihin intervalliavaruudelliseen sävelluokkaan ne kuuluvat. Sävelen numeroarvon osuessa nollan ja yhdentoista väliin on se suoraan myös sävelluokan numeroarvo. Sävelen numeroarvon ollessa negatiivinen tai suurempi kuin yksitoista siihen lisätään tai siitä vähennetään jokin kahdentoista kerrannainen - 1*12=12, 2*12=24, 3*12=36 jne.- siten, että summa tai erotus on nollan ja yhdentoista välillä. Toimenpiteen tulos kertoo sävelen sävelluokan numeroarvon. Kahdentoista tai jonkin sen kerrannaisen lisääminen sävelen numeroarvoon/vähentäminen sävelen numeroarvosta vastaa sävelen transponoimista ylöspäin/alaspäin yhdellä tai useammalla oktaavilla. Epämuodollisesti voitaisiin ilmaista, että rekisteriavaruus tulee intervalliavaruuteen siirryttäessä ikäänkuin supistetuksi "oktaavin sisään".

Myös kaikissa sävelluokkien kesken suoritettavsissa laskutoimituksissa menetellään siten, että negatiiviset tai yhtätoista suuremmat numeroarvot palautetaan lukujen 0-11 väliin. Vastedes tässä esityksessä toimitaan automaattisesti tällä tavoin, veikkei sitä oltaisikaan erikseen merkitty näkyviin.[6]

Täten esim. 7+7=14=14-12=2 ja 3-5=-2=-2+12=10.

1.2.5. PUOLISÄVELLUOKKA-ASKELEET, INTERVALLIT, KOMPLEMENTTI-INTERVALLIT, INTERVALLILUOKAT

Rekisteriavaruuden puolisävelaskeleen intervalliavaruudellinen vastine on *puolisävelluokka-askel*. Sävelluokkaympyrän kahden vierekkäisen sävelluokan väli on yksi puolisävelluokka-askel. Kaikkiaan sävelluokkaympyrän kehä jakaantuu siten kahteentoista puolisävelluokka-askeleeseen.

Intervalli määritellään kahden sävelen tai sävelluokan välisenä etäisyytenä.

Jos sävel x edeltää säveltä y, on niiden välille syntyvä intervalli x:n ja y:n numeroarvoista riippuen joko ylös- tai alaspäinen *suunnattu säveltasointervalli* (directed pitch interval, ordered pitch interval). Suunnattu intervalli lasketaan vähentämällä *y:n numeroarvosta x:n numeroarvo*. Muodollisemmin ilmaistuna si<x,y> = y-x, jossa "si" on kahden sävelen välinen säveltasointervalli ja jossa sulkujen < > väliin sijoitettujen termien järjestys on määrätty.[7]

Esimerkiksi jos x on sävel 0 (tässä tapauksessa nollaksi valitaan 1-viivainen c) ja y on sävel 4 (1-viivainen e) on niiden välinen suunnattu säveltasointervalli 4-0=4.Jos päinvastaisessa tilanteessa x=4 ja y=0, on niiden välinen suunnattu säveltasointervalli 0-4=-4.

Mikäli sävelten x ja y keskinäistä järjestystä ei määritellä tai ne ovat yhtaikaisia, ei niiden välinen intervalli ole sen enempää ylös- kuin alaspäinenkään. Kysymyksessä on *suuntaamaton säveltasointervalli* (undirected pitch interval tai unordered pitch interval). Intervalli on tällöin y:n ja x:n erotuksen *itseisarvo*. Toisin ilmaistuna si(x,y) = |y-x|, jossa sulkujen ( ) väliin sijoitettujen termien järjestystä ei ole määrätty.[8] Lopputulos on aina sama, määriteltiinpä vuoroin sävelparin kumpi tahansa jäsen x:ksi tai y:ksi. Edellisen esimerkin tapauksessa siten |4-0|=|0-4|=4.

Intervalliavaruuden itseensäkiertyvyyden vuoksi on kahden sävelluokan välisen intervallin eli *sävelluokkaintervallin* määritteleminen hieman erilainen toimenpide kuin kahden rekisteriavaruudellisen sävelen välisen intervallin määritteleminen.

Jos sävelluokkien x ja y keskinäinen järjestys on määritelty - x edeltää y:tä - syntyy niiden välille *suunnattu sävelluokkaintervalli* (ordered pitch-class interval, directed pitch-class interval). Koska sävelluokat ovat rekistereiltään määrittelemättömiä, ei syntyvä intervalli ole R-avaruudellisessa mielessä ylös- eikä alaspäinen: jos esim. x on 0 (c) ja y on 2 (d), on jokin c aina korkeammalla kuin jokin d, ja jokin d aina korkeammalla kuin jokin c. Kehämäisen I-avaruuden *sisällä* on kuitenkin aina kaksi suuntavaihtoehtoa, y tulee vastaan mentäessä x:stä sekä "ylöspäin" - kohden suurempia numeroarvoja, sävelluokkaympyrällä myötäpäivään - että "alaspäin" - kohden pienempiä numeroarvoja, ympyrällä vastapäivään.

Näistä kahdesta luonnollisesti täysin yhdenvertaisesta vaihtoehdosta on joukkoteoriassa otettu sopimuksenvaraisesti käyttöön ensimmäinen. Suunnattu sävelluokkaintervalli tulkitaan siis aina ylöspäiseksi, kohden suurempia numeroarvoja eteneväksi, ympyrällä myötäpäiväiseksi. Muodollinen esitystapa on sli <x,y>=y-x mod 12, jossa sli on sävelluokkaintervalli.

Näinollen järjestykseltään määriteltyjen (ensiksimainittu edeltää toista) sävelluokkaparien välinen suunnattu sävelluokkaintervalli esim. sävelluokkien 0 ja 1 tapauksessa on 1 (1-0=1), sävelluokkien 1 ja 0 tapauksessa 11 (0-1=-1+12=11), sävelluokkien 3 ja 7 tapauksessa 4 (7-3=4) jne.[9]

Jos kahden sävelluokan välistä järjestystä ei ole määritelty, määrittävät ne keskenään I-avaruuden rakenteesta johtuen kaikissa olosuhteissa *kaksi* intervallia. Tämä seikka havainnollistuu vaivattomasti sävelluokkaympyrän avulla. Ympyrälle mielivaltaisesti sijoitetut kaksi sävelluokkaa x ja y määrittävät kaksi intervallia, (myötäpäivään) x:stä y:hyn mentäessä muodostuvan intervallin ja (myötäpäivään) y:stä x:n mentäessä muodostuvan intervallin. Kumpikin "välimatkavaihtoehto" on luonnollisesti aivan samanarvoinen.

Olivatpa täten syntyneiden intervallien koot puolisävelluokka-askelin mitattuna mitkä hyvänsä, on niiden summa aina 12 puolisävelluokka-askelta eli ne kattavat yhdessä koko ympyrän. Kahdeksitoista summautuvia intervalleja sanotaan *komplementti-intervalleiksi* tai *käänteisintervalleiksi* (complementary intervals, complementary mod 12 intervals).

Näiden intervallien summan vakioisuudesta seuraa, että komplementti-intervallipareihin liittyvää informaatiota käsiteltäessä riittää pelkästään toisella intervallilla operoiminen. Toinenhan on aina automaattisesti johdettavissa: jos kaksi sävelluokkaa määrittävät intervallin 5, määrittävät ne "toista kautta" automaattisesti tällöin myöskin intervallin 7. Jos kaksi sävelluokkaa määrittävät intervallin 3, määrittävät ne automaattisesti myöskin intervallin 9.jne., yleensä siis intervallin z komplementti-intervalli on 12-z.

Joukkoteoriassa on vakiintunut tapa, että kunkin sävelluokkaparin määrittämistä komplementti-intervalleista valitaan edustajaksi numeroarvoltaan *pienempi*. John Rahn nimittää pienempää jäsentä nimellä *suuntaamaton sävelluokkaintervalli* (*unordered pitch-class interval, undirected pitch class interval*).

Muodollinen merkintätapa: sli(x,y)= pienempi vaihtoehdoista sli <x,y> ja sli<y,x>.[10] Useammin on kuitenkin tapana puhua *intervalliluokista* (*interval classes*). Intervalliluokka on komplementti-intervallipari, joka on nimetty pienemmän intervallin tai komplementti-intervallien ollessa yhtä suuria ainoan intervallin mukaan.

Jotkut tekstit mainitsevat intervalliluokkien määräksi kuusi.[11] Intervalliluokkaan 1 kuuluvat intervallit 1 ja 11, intervalliluokkaan 2 intervallit 2 ja 10, intervalliluokkaan 3 intervallit 3 ja 9, intervalliluokkaan 4 intervallit 4 ja 8, intervalliluokkaan 5 intervallit 5 ja 7 sekä intervalliluokkaan 6 intervalli 6 (6+6=12=0). Muutamat muut tekstit liittävät vielä seitsemänneksi intervalliluokan 0 (0+0=0).[12]

Mainittakoon, että vaikka I- ja R-avaruuden eroavaisuuksien vuoksi erottelu sävelluokka- ja säveltasointervallien välillä on määritelmien yhteydessä tarpeen, käytetään normaalisti vain termiä intervalli. Se kumpaa vaihtoehtoa kulloinkin tarkoitetaan, käy aina ilmi yhteydestä.

1. 2.6. JOUKKO

Sävelluokkajoukko tai lyhyemmin *joukko* (pitch-class set, pc set, pitch-class collection, pc collection) määritellään sävelluokista koostuvaksi kokonaisuudeksi, jossa jäsenten keskinäistä järjestystä ei ole määrätty ja jossa kukin jäsen voi esiintyä vain kerran.

"[sets =] unordered collections of pc (disregarding distinctions of "which came first")".[13] "A pitch-class set, then, is a set of distinct integers (i.e., no duplicates) representing pitch classes. Strictly speaking,one should use the term *set of pitch-class representatives*, but that is unwieldy".[14]

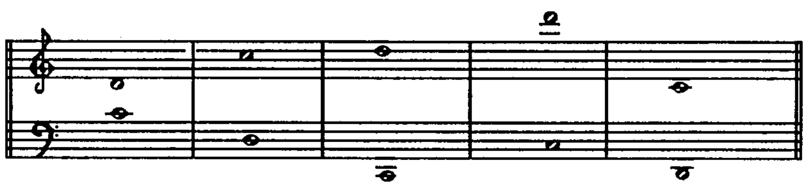
Joukon *jäsenet* eli *alkiot* muodostavat sen *sävelluokkasisällön*. Jos sävelluokka x kuuluu joukkoon A, merkitään $x \in A$. Jos sävelluokka x ei kuulu joukkoon A, merkitään $x \notin A$.

Joukkojen merkintätavoissa on pieniä eroavaisuuksia. Tässä esityksessä joukon jäsenet sijoitetaan kaarisulkeiden sisään ja erotetaan toisistaan pilkuilla. Joukon symboli on iso kirjain ja alkion symboli on pieni kirjain.

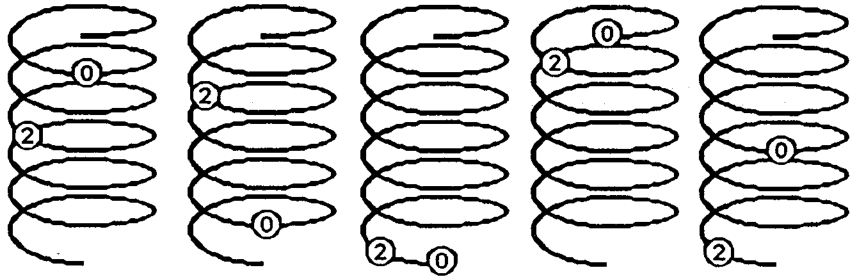
Esimerkeissä 3,4 ja 5 on yksinkertainen näyte erilaisten rekisteriavaruudellisten säveltasokombinaatioiden kuulumisesta samaan joukkoon. Esimerkissä 3 on viisi satunnaisesti valittua tapausta, joissa kussakin jokin sävel c ja jokin sävel d muodostavat kaksijäsenisen säveltasokombinaation. Esimerkissä 4 a-e on toiset viisi kombinaatiota kuvattuna "sävelavaruusvieterillä".

Esimerkissä 5 on kaikkia näitä tapauksia kuvaava joukko sävelluokkaympyrälle sijoitettuna.

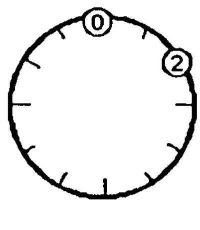
Esim. 3 a b c d e



Esim 4 a b c d e



Esim.5



Intervalliavaruuden kaikki 12 sävelluokkaa sisältävästä joukosta {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} käytetään mm. nimityksiä *universaalijoukko, U, krooma* ja *aggregaatti* (total chromatic, universal set, aggregate, mod 12 universe).

Tyhjä joukko (null set, empty set) on joukko, jossa ei ole yhtään jäsentä. Tyhjän joukon symboli on Ø.

Joukon *kardinaalisuus* (cardinality) eli *koko* ilmaisee joukon jäsenten lukumäärän. Kardinaalisuuden symboli on ylennysmerkki, #. Jos joukossa A on enemmän sävelluokkia kuin joukossa B, kirjoitetaan #A > #B tai #B < #A.

1. 2.7. SÄVELTASOKOMBINAATION JA SIITÄ MUODOSTETUN JOUKON SUHDE

Muodostettaessa rekisteriavaruudellisesta säveltasokombinaatiosta joukkoa näyttää se toimenpiteen myötä ikäänkuin sijoittuvan yhden (itseensäkiertyvän) oktaavin sisään. Eri oktaavialoissa tietyssä keskinäisessä järjestyksessä sijainneet säveltasot asettuvat sävelluokkaympyrällä vierekkäin, jolloin R-avaruuden käsitteet "korkeammalla" tai "matalammalla" eivät päde. On selvää, että jotain säveltasokombinaation ominaislaadusta tällöin menetetään. Mutta eräs tärkeä aspekti säilyy, nimittäin alkuperäisen säveltasokombinaation jäsenten välisten intervallien *harmoniset karaktäärit*. Tämähän on jo perinteisestä musiikinteoriasta tuttu ilmiö: terävä dissonanssi säilyy terävänä, esitetään se sitten pienenä sekuntina, tämän komplementti-intervallina suurena septiminä tai jonakin näiden oktaavikerrannaisista. Mieto dissonanssi säilyttää harmonisen karaktäärinsä, esitettiinpä se sitten suurena sekuntina, tämän komplementti-intervallina pienenä septiminä tai jonakin näiden oktaavikerrannaisista. Sama pätee myös sointusävyisiin konsonansseihin, avosävyisiin konsonansseihin ja tritonuksiin.

Intervalliluokkien jäsenintervallit edustavat siis aina *samaa* harmonista karaktääria. Intervalliluokan 1 jäsenintervallit 1 ja 11 ovat teräviä dissonansseja. Intervalliluokan 2 jäsenintervallit 2 ja 10 ovat mietoja dissonansseja. Intervalliluokan 3 jäsenintervallit 3 ja 9 muodostavat yhdessä yhden kahdesta sointusävyisestä harmonisesta karaktäärista - perinteisen teorian termein pieni terssi/suuri seksti oktaavikerrannaisineen. Intervalliluokan 4 jäsenintervallit 4 ja 8 muodostavat puolestaan toisen sointusävyisistä harmonisista karaktääreista - suuri terssi/pieni seksti oktaavikerrannaisineen. Intervalliluokan 5 jäsenintervallit 5 ja 7 ovat avosävyisiä konsonansseja. Intervalliluokan 6 jäsenintervalli 6 käsittää R-avaruudelliset tritonukset oktaavikerrannaisineen.

Jokaisella R-avaruudellisella säveltasokombinaatiolla ja jokaisella I-avaruudellisella joukolla on sekä *kokonaisintervallisisältö*, joka koostuu joukon/säveltasokombinaation jokaisen jäsenen välimatkasta jokaiseen toiseen jäseneen, että *kokonaisintervalliluokkasisältö*, joka puolestaan ilmaisee, miten kokonaisintervallisisällön intervallit ryhmittyvät edelleen intervalliluokiksi. Kokonaisintervalliluokkasisältöä kuvataan ns. *intervallivektorin* avulla.

Jokaisesta säveltasokombinaatiosta voidaan johtaa yksi joukko, jolla puolestaan on yksi intervallivektori. Yhdestä joukosta sensijaan voidaan johtaa lukuisia R-avaruudellisia säveltasokombinaatioita (joukon R-avaruudellisia versioita t. ilmentymiä), joita yhdistää sama kokonaisintervalliluokkasisältö.

Yksi intervallivektori voi olla monille joukoille yhteinen - tietty joukko, sen käännös ja näiden transpositiot. Sama kokonaisintervallisisältö voi yhdistää lukuisia R-avaruudellisia kombinaatioita, joiden säveltasosisällöt eivät ole samat - tietty säveltasokombinaatio, sen käännös ja näiden transpositiot. (Näihin kysymyksiin palataan tarkemmin luvussa *Leikkausvektorit*).

Ns. *Z-suhteisissa* tapauksissa voi joukoilla olla identtiset intervallivektorit, vaikka niiden rakenteet ovat erilaiset. Sama vektori muotoutuu erilaisista lähtökohdista.[15]

R-avaruudessa on kokonaisintervallisisältöjen ottaminen säveltasokombinaatioiden tutkimisen näkökulmaksi sitä vaivalloisempaa, mitä useampijäsenisiä kombinaatioita on käsillä. Vaihtoehtoja on valtavasti, ja jo pelkästään kahden samankokoisen kombinaation kokonaisintervallisisältöjen toteaminen identtiseksi tai epäidenttiseksi on aikaaviepä operaatio, muista mahdollisista kokonaisintervallisisältöjä koskevista näkökulmista puhumattakaan.

Mahdollisuus aktivoida R-avaruudellisen kokonaisintervallisisällön käsite I-avaruudellisten intervallivektorien avulla tähänastista vaivattomammaksi ja käyttökelpoisemmaksi harmonioiden prosessoinnin osatekijäksi on mielestäni kiinnostava haaste joukkoteorialle. Tässä esityksessä ei tähän kysymyksenasetteluun voida kuitenkaan puuttua lainkaan, sillä intervallivektoreista tutkitaan vain niiden muodostustapoja.

1. 2.8. OSAJOUKKO, YHDISTE, LEIKKAUS, EROTUS, KOMPLEMENTTI

Joukko A on joukon B *osajoukko* (subset), jos jokainen A:n alkio kuuluu B:hen. Merkitään $A \subset B$ (tai $B \supset A$).

Esimerkki 6 a: A = {0,1,3}, B = {0,1,2,3,4}. Jokainen A:n alkio on B:n alkio, joten $A \subset B$.

Joukkojen A ja B *yhdiste* eli *unioni* (union) on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A tai joukkoon B. Merkitään $A \cup B$.

Esimerkki 6 b: A = {2,4,8,11}, B = {0,1,2,6}. $A \cup B$ = {0,1,2,4,6, 8,11}.

Joukkojen A ja B *leikkaus*, (intersection) on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B. Merkitään $A \cap B$.

Esim. 6 c: A = {0,1,3,5,7}, B = {1,2,3,5,6,7}. Leikkausjoukko $A \cap B$ = {1,3,5,7}.

Joukkojen A ja B *erotus* (set difference) on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon A mutta eivät joukkoon B. Merkitään $A \setminus B$ (tai A-B). Vastaavasti joukkojen B ja A erotus on niiden alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon B mutta eivät joukkoon A. Merkitään $B \setminus A$ (tai B-A).

Esimerkki 6 d: $A = \{0,1,3,4,5,7,8\}$, $B = \{1,2,3,5,6,7,9\}$. $A \setminus B = \{0,4,8\}$. $B \setminus A = \{2,6,9\}$.

Jos A on B:n osajoukko, muodostaa erotusjoukko $B \setminus A$ joukon A *komplementin* (complement) *B:ssä*. $B \setminus A$ voidaan tällöin merkitä myös C_BA. Kaikissa tapauksissa joissa $A \subset B$, niin $A \cup C_BA = B$, ja $A \cap C_BA = \emptyset$.

Esimerkki 6 e: $A = \{0,1,3\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$. $A \subset B$. $C_BA = \{2,4\}$. (Ks. viite [16])

1. 2.9. TRANSPONOIMINEN

Transponointi määritellään joukkoteoriassa sävelen tai sävelluokan sekä *transpositiointervallin* numeroarvojen yhteenlaskuna. Jos transponoitavana on useammista sävelistä tai sävelluokista muodostuva kokonaisuus, transponoidaan kokonaisuuden kukin jäsen erikseen.

Sävelen transponointi voidaan merkitä muodollisemmin $T_m(y)=y+m$, jossa T merkitsee transponointia, m on jokin säveltasointervalli ja y on jokin sävel. Vaikka transponointi esitetään yhteenlaskuna, voidaan R-avaruudessa tietenkin suorittaa transponointeja joiden lopputulos on transponoituminen *alaspäin*. Tämä tapahtuu valitsemalla m:ksi jokin negatiivinen luku.

Esimerkki 7: $T_{-4}(10)=10+(-4)=6$.

I-avaruudessa voi transpositiointervalli liikkua välillä 0-11. Alaspäistä transponointia ei siten periaatteessa ole, vaikka tämänsuuntaisia (kenties epähuomiossa tehtyjä) viittauksia teksteistä toisinaan löytyykin.[17]

Muodollisemmin sävelluokan transponointi voidaan merkitä $T_n(x)=x+n$ mod 12, jossa n on jokin sävelluokkaintervalli ja x jokin sävelluokka.[18]

Esimerkki 8: $T_7(9)=9+7=16=4$.

1. 2.10. KÄÄNTÄMINEN

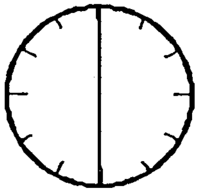
Kääntäminen (inverting) voidaan määritellä tai kuvata useilla toisistaan hieman poikkeavilla tavoilla, mutta perusasetelma on kuitenkin aina sama: R-avaruudellinen sävel tai sävelryhmä tai I-avaruudellinen sävelluokka tai joukko käännetään jonkin akselin suhteen, jolloin käännettävä objekti ja kääntämisen lopputulos eli *käännös* tai *inversio* (inversion) muodostavat keskenään akseliin nähden symmetrisen asetelman.[19]

1. 2.10.1. kääntäminen akselin suhteen

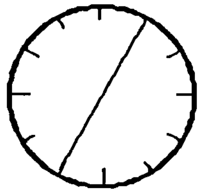
Käännösten tutkiminen aloitetaan tarkastelemalla tyhjiä sävelluokkaympyröitä, joihin on merkitty sävelluokkien paikkoja osoittavat kohdat ilman numeroita. Jos sävelluokkaa nolla osoittavasta paikasta vedetään viiva ympyrän ajatellun keskipisteen kautta sävelluokkaa kuusi osoittavaan paikkaan, suhtautuvat syntyneen symmetria-akselin molemmille puolille jäävät ympyrän puolikkaat toisiinsa peilikuvamaisesti. Samanlaisen tuloksen antaa jokainen tiettyä sävelluokkaa osoittavalta paikalta ympyrän ajatellun keskipisteen kautta vastakkaiselle puolelle piirretty akseli.

Akselien päätekohdat, joita nimitetään *kiintopisteiksi* (myöhemmin symmetrioiden yhteydessä myös *symmetrian kiintopisteiksi*), kulkevat siis sävelluokkia 0/6, 1/7, 2/8, 3/9, 4/10 ja 5/11 osoittavien paikkojen välillä. (Esim 9 a-f).

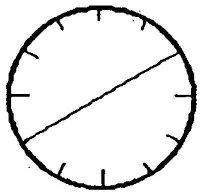
Esim. 9 a

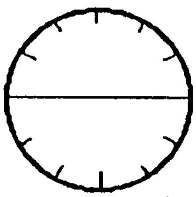


Esim. 9 b

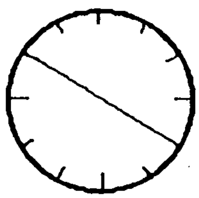


Esim. 9 c

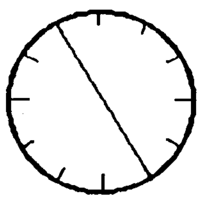




Esim. 9 d



Esim. 9 e



Esim 9 f

Tämän lisäksi voidaan vastaavanlaiset akselit piirtää sävelluokkia osoittavien paikkojen *väleistä* ympyrän ajatellun keskipisteen kautta vastakkaisella puolella sijaitsevien sävelluokkia osoittavien paikkojen väleihin. Tällöinkin suhtautuvat akselit molemmille puolille jäävät ympyrän osat toisiinsa peilikuvamaisesti. Nämä akselit sijoittuvat puolisävelluokka-askelten puolikkaille, joten niiden kiintopisteiden mumeroarvot ovat 1/2 - 6 1/2 , 1 1/2 - 7 1/2 , 2 1/2 - 8 1/2 , 3 1/2 - 9 1/2 , 4 1/2 - 10 1/2 ja 5 1/2 - 11 1/2. (Esim. 10 a-f, seur. sivulla).

Puolisävelluokka-askeleen puolikas vastaa r-avaruudessa neljäsosasävelaskelta, joten sitä voidaan nimittää *neljäsosasävelluokka-askeleeksi*. Kaikkiaan mahdollisia akseleita on 12.

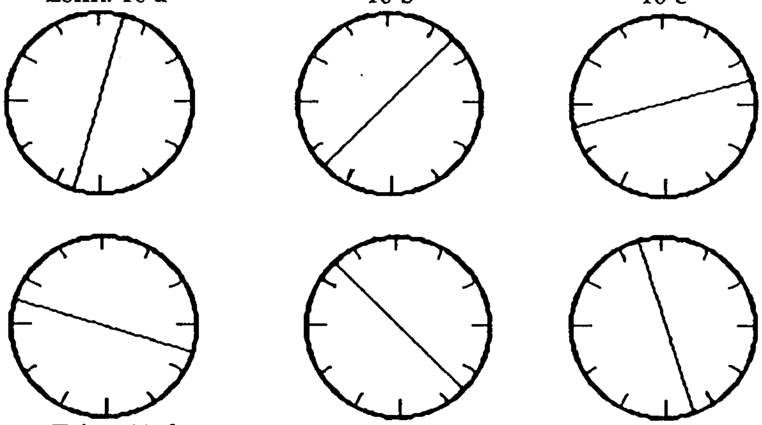
Esimerkissä 11 on sävelluokkaympyrälle sijoitettu sävelluokka nolla. Jos mahdollisista akseleista valitaan vaikkapa 1/7 ja etsitään sävelluokka, joka on akselin numeroarvolla 1 varustetun kiintopisteen *toisella puolella* yhtä kaukana kuin nolla on siitä omalla puolellaan, päädytään sävelluokkaan 2.

Sävelluokka 0 käännettynä akselin 1/7 suhteen tuottaa sävelluokan 2, ja päinvastoin. Voidaan sanoa, että sävelluokat 0 ja 2 ovat toistensa käännökset tai *käänteissävelluokat* akselin 1/7 suhteen. (Esim. 11 a-b).

Jos akseliksi valitaan 1/2 - 6 1/2, on sävelluokasta 0 matkaa akselin numeroarvolla 1/2 varustettuun kiintopisteeseen yhtä paljon kuin siitä on sävelluokkaan 1. Sävelluokka 0 akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen käännettynä tuottaa siis sävelluokan 1, ja päinvastoin. Sävelluokat 0 ja 1 ovat toistensa käänteissävelluokat akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen. (Esim. 11 c-d).

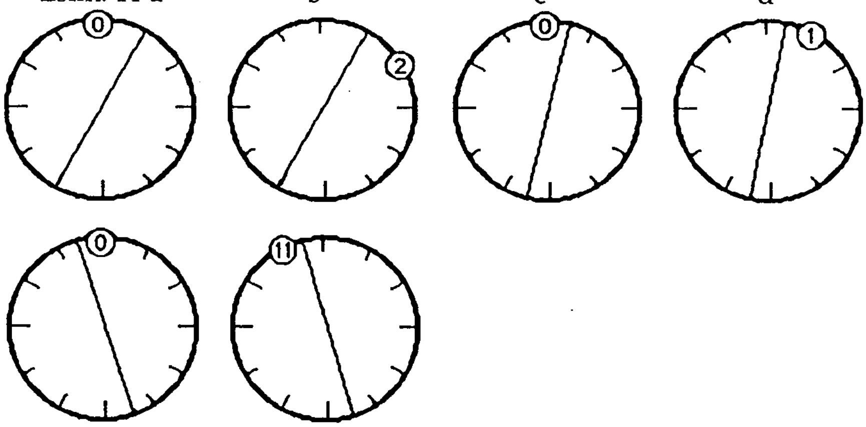
Jos vielä akseliksi valitaan 5 1/2 - 11 1/2, on sävelluokasta 0 matkaa numeroarvolla 11 1/2 varustettuun kiintopisteeseen yhtä paljon kuin siitä on säveluokkaan 11. Sävelluokka 0 akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen käännettynä tuottaa siis sävelluokan 11, ja päinvastoin. Sävelluokat 0 ja 11 ovat toistensa käänteissävelluokat akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen. (Esim.11 e-f).

Esim. 10 a 10 b 10 c



Esim. 10 d 10 e 10 f

Esim. 11 a b c d



Esim. 11 e f

Pantakoon merkille, että kaikissa edellisissä tapauksissa käänteisyys voitaisiin todeta yhtä hyvin akselin *kummankin* kiintopisteen suhteen. Esimerkin 11 a- ja b-kohdissa sävelluokat 0 ja 2 sijaitsevat kumpikin yhden sävelluokka-askeleen päässä kiintopisteestä jonka numeroarvo on 1 ja viiden puolisävelluokka-askeleen päässä kiintopisteestä jonka numeroarvo on 7. O ja 2 ovat käänteisiä sekä sävelluokan 1 että sävelluokan 7 suhteen.

Käänteisyys akselin molempien kiintopisteiden suhteen pätee kaikkiin I-avaruudellisiin tapauksiin ja kaikenkokoisiin joukkoihin. Jos joukko A on käänteinen joukon B kanssa numeroarvon k omaavan kiintopisteen suhteen (sijaitsipa k sitten sävelluokan kohdalla tai kahden sävelluokan välissä), on A käänteinen myös kiintopisteen k+6 suhteen. Akselin toisen kiintopisteen numeroarvo on aina välttämättä juuri k+6, sillä sen määrittämä kohtahan on ainoa johon k:sta ympyrän ajatellun keskipisteen kautta kulkeva akseli voi osua.

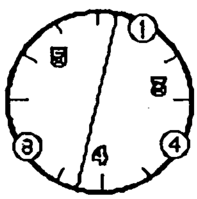
Merkintätavaksi sovitaan iso I-kirjain, sen yläindeksiksi akselin jommankumman kiintopisteen numeroarvo - molempia kiintopisteitä ei tarvitse merkitä niiden etäisyyden ollessa vakio - ja niiden jälkeen joukko joka käännetään. Esimerkin 11 a-b -kohtien tapaus kirjoitetaan $I^{1}\{0\}=\{2\}$, c-d -kohtien tapaus $I^{1/2}\ \{0\} = \{1\}$ ja e-f -kohtien $I^{5\ 1/2}\ \{0\} = \{11\}$.

Esimerkissä 11 operoitiin yksittäisillä sävelluokilla (yksijäsenisillä joukoilla), mutta yhtä hyvin voidaan operoida myös suuremmilla joukoilla.

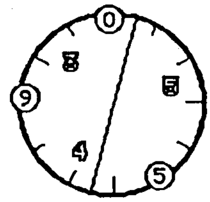
Esimerkki 12 :joukko {1,4,8} käännetään akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen. (Esim 12 a). Tehtävänä on näinollen määritellä, mikä on joukko $I^{1/2}\ \{1,4,8\}$.

Joukon jäsenestä 1 on (jompaankumpaan) kiintopisteeseen yhtä pitkä matka kuin (samasta) kiintopisteestä on sävelluokkaan 0. Joukon jäsenestä 4 on kiintopisteeseen yhtä pitkä matka kuin kiintopisteestä on sävelluokkaan 9. Joukon jäsenestä 8 on kiintopisteeseen yhtä pitkä matka kuin kiintopisteestä on sävelluokkaan 5. Joukko {1,4,8} käännettynä akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen tuottaa joukon {0,5,9} eli $I^{1/2}\ \{1, 4,8\} = \{0,5,9\}$.

Esim. 12 a



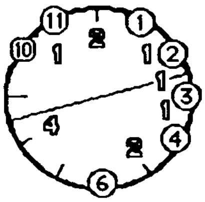
Esim. 12 b



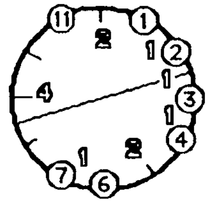
Esimerkki 13 : seitsemänjäseninen joukko {1,2,3,4,6,10,11} käännetään akselin 2 1/2 - 8 1/2 suhteen.

Jäsen 10 on (jommastakummasta) kiintopisteestä yhtä kaukana kuin (sama) kiintopiste on sävelluokasta 7. Jäsen 11 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 6. Jäsen 1 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 4. Jäsen 2 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 3. Jäsen 3 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 2. Jäsen 4 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 1. Jäsen 6 on kiintopisteestä yhtä kaukana kuin kiintopiste on sävelluokasta 11. Käänteisjoukon sävelluokat ovat {1,2,3,4,6,7,11}. $I^{2\,1/2}$ {1,2,3,4,6,10,11} = {1,2,3,4,6,7,11}. (Esim. 13 a-b).

Esim. 13 a



Esim. 13 b



Mikäli jokin sävelluokka sijaitsee kiintopisteen kohdalla, se pysyy käännettäessä itsenään. Tällöinhän sen etäisyys lähimmästä kiintopisteestä on nolla puolisävelluokka-askelta, joten "siirtyessään" nollan puolisävelluokka-askeleen päähän akselin toiselle puolelle se on oma käännöksensä. Eli I^0{0}={0}, I^2 {2,8}={2,8}, I^3 {9,3} = {9,3} jne.

Edelläesitettyjen käsitteiden avulla voidaan määritellä, että I-avaruudellisen joukon kääntäminen on operaatio, jossa joukon jäseninä olevat sävelluokat korvataan sävelluokilla, joiden etäisyydet annetun akselin valinnaisesta kiintopisteestä ovat samat kuin käännettävän joukon jäsenten kiintopisteen toisella puolella [20].

Esitettyjen esimerkkien kuvaamalla tavalla voidaan tutkia jokaisen joukon käännökset jokaisen akselin suhteen. Operaatio on yksinkertainen ja havainnollinen mutta verraten monivaiheinen, joten se on aikaaviepä yhteyksissä joissa sitä on toistettava useita kertoja. Tämän vuoksi aion eräiden tarpeellisten käsitteiden tultua määritellyiksi esittää tavan, jolla käänteisjoukot voidaan selvittää nopeammin ja helpommin. (Ks.kohta 4: *Joukkojenvälisistä käänteissuhteista*).

1. 2.10.2. muita kääntämisen määritelmiä

Joukkoteoriassa varsin yleisesti käytössä olevan tavan mukaan kääntäminen määritellään aina nimenomaisesti *kääntämiseksi akselin 0-6 suhteen.*[21] Tällöin toimitaan siten,että sävelluokka korvataan *käännesävelluokallaan* (inverse) tai joukon kaikki sävelluokat käännesävelluokillaan. Käännesävelluokan numeroarvo puolestaan on alkuperäisen sävelluokan numeroarvo vähennettynä kahdestatoista: sävelluokan x käännesävelluokka on (12-x). (Käännesävelluokkapareja älköön sekoitettako valitettavan samannimisiin käänteissävelluokkapareihin: edellisten kriteerinä on että niiden summa on aina 0, jälkimmäisten taas että ne sijaitsevat yhtä etäällä jonkin akselin kiintopisteistä, ollen sen suhteen käänteiset). Sävelluokan 1 käännesävelluokka on 11, sävelluokan 3 käännesävelluokka on 9, sävelluokan 7 käännesävelluokka on 5 jne.

Akselin 0-6 suhteen kääntämisen välitön etu on siinä, että käännesävelillä korvaaminen on helppoa. On esimerkiksi vaivatonta kääntää joukko

{1,2,3,4} akselin 0-6 suhteen korvaamalla sävelluokat käännesävelillään ja saada käänteisjoukko {11,10,9,8}.

Koska musiikissa kuitenkin esiintyy akselin 0-6 suhteen tehtyjen käännösten lisäksi myös muita, tulee näitä "vakiokäännöksiä" useimmiten lisäksi transponoida halutun käännöksen saavuttamiseksi. Täten kyseessä on yksi toimenpide, kääntäminen, joka suoritetaan *yhdistelmäoperaation* (compound operation), akselin 0-6 suhteen kääntämisen ja transponoinnin avulla. Toimenpiteiden suoritusjärjestys on keskeisen tärkeä: käytäntönä on, että ensin käännetään ja sitten transponoidaan. Toisinpäin suoritettuna lopputulos on toinen.[22]

Yleisimmän merkintätavan mukaan joukolle A suoritettava kääntämisen ja transponoinnin yhdistelmäoperaatio merkitään T_nIA, jossa T tarkoittaa transponointia, n on transpositiointervalli ja I tarkoittaa kääntämistä.[23]

Kun jokin joukko käännetään akselin 0-6 suhteen ja transponoidaan, on "lopullinen" käännetty ja transponoitu joukko luonnollisesti käännetty todellisuudessa jonkin muun intervalliavaruudellisen akselin kuin 0-6 suhteen. Todellinen käänteisakseli selviää tällöin *jakamalla transpositiointervallin numerorvo kahdella.* Jos yksijäseniselle joukolle {1} suoritetaan yhdistelmäoperaatio $T_4I\{1\}=\{3\}$, tulee {1} käännetyksi akselin 2-8 suhteen, sillä 4/2=2. Jos taas joukko käännetään tunnetun akselin suhteen, saadaan oikea yhdistelmaoperaatiomerkintä vaivattomasti *kertomalla jommankumman kiintopisteen numeroarvo kahdella ja merkitsemällä se transpositiointervalliksi.* Kun esimerkiksi yksijäseninen joukko {1} käännetään akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen ja saadaan {10}, saadaan yhdistelmäoperaatiomerkinnän transpositiointervalli kertomalla jommankumman kiintopisteen numeroarvo kahdella (tulos on aina sama molemmin päin: 2*5 1/2 = 11 ja 2*11 1/2 = 23 = 11). Merkintä on $T_{11}I\{1\} = \{10\}$.

Kirjallisuudessa tapaa toisinaan kritiikkiä käännöksen yhdistelmäoperaatiomääritelmää kohtaan.[24]

Muuan mahdollinen mutta hyvin vähän käytetty tapa käännöksen määrittelemiseksi on esittää se joukon jäsenten numeroarvojen vähentämisenä jostain välillä 0-11 olevasta numerosta. Esimerkkitapauksessa joukon {0,1,3,5} jäsenet vähennetään numerosta 4. 4-0=4, 4-1=3, 4-3= 1, 4-5=-1=11. Käänteisjoukko on {4,3,1,11}. Tämä yhteinen vähennettävä, jonka Milton Babbitt on nimennyt *indeksiksi* (index, index number, inversional index), on aina joukon jonkin jäsenen ja sen käänteisjoukossa olevan käänteisjäsenen summa. Äskeisessä esimerkissä 0+4=4, 1+3 =4, 3+1 = 4 ja 5+11 = 16 = 4.

Jakamalla indeksi kahdella selviää symmetria-akselin toisen kiintopisteen numeroarvo. Esimerkin indeksi 4 jaettuna kahdella on 2, joten joukot {0,1,3,5} ja {11,1,3,4} ovat käänteiset akselin 2-8 suhteen. Vastavuoroisesti kahden toisiinsa käänteisesti suhtautuvan joukon indeksi selviää kertomalla akselin jommankumman kiintopisteen numeroarvo kahdella. Esim. $I^{1/2}\{10,11\} = \{2,3\}$, joten indeksi on 2*1/2 = 1. (10+3 = 13 = 1, 11+2 = 13 = 1).

Mikäli käytetään kääntämisen ja transponoimisen yhdistelmäoperaation hyödyntämää merkintätapaa, voidaan indeksi merkitä suoraan transpositiointervalliksi. Äskeisistä esimerkeistä ensimmäisessä merkitään siten $T_4I\{0,1,3,5\}=\{11,1,3,4\}$ ja jälkimmäisessä $T_1I\{10,11\} = \{2,3\}$. Kuten huomataan, kääntämisen määritteleminen yhdistelmäoperaation avulla ja indeksin avulla ovat lähes samanlaisia metodeja. Yhdistelmäoperaatiota käyttävässä tavassa vähennetään aina kahdestatoista (ennen transponoimista), jälkimmäisessä tavassa taas vähennettävä ei ole vakio, jonka vuoksi transponointivaihe jää pois.[25]

1. 2.11. INTERVALLIKOT

1. 2.11.1. intervallikon määritteleminen

Edellä on käsitelty intervalleja, jotka kuvaavat sävelluokkien välisiä etäisyyksiä, sekä viitattu intervallivektoreihin, jotka kuvaavat joukon intervalliluokkasisältöä. Niiden oheen - tai pikemminkin niiden väliin - sijoittuu kolmas tärkeä sävelluokkien välisten etäisyyksien tarkasteluun soveltuva väline, *intervallikko* (successive-interval array, interval array, interval notation, interval series, interval number series, adjacent-interval series). Intervallikko on nousevaan järjestykseen saatetun joukon *peräkkäisten sävelluokkien välisistä intervalleista koostuva intervalliketju.*

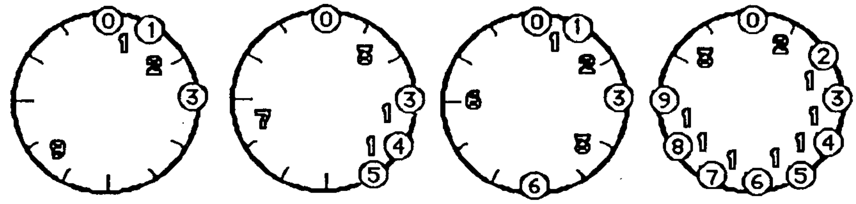
Nousevalla järjestyksellä tarkoitetaan tässä järjestystä joka vastaa myötäpäiväistä järjestystä sävelluokkaympyrällä. Joukot {1,3,5,8} , {7,10,11,0,3} ja {9,2,5} ovat nousevassa järjestyksessä, sillä yhden jäsenen tultua luetelluksi seuraava on aina ensimmäinen mahdollinen vastaantuleva joukon jäsen edettäessä ympyrällä myötäpäivään. Joukko {11,2,5,3,6,8} sensijaan ei ole nousevassa järjestyksessä, sillä viitosen jälkeen pitäisi kolmosen saavuttamiseksi joko mennä vastapäivään tai hypätä myötäpäivään kymmenen puolisävelluokka-askeleen verran 6:n, 8:n, 11:n ja 2:n yli. Nousevassa järjestyksessä joukko on {11,2,3,5,6,8}. Kaikki sävelluokkaympyrälle valmiiksi sijoitetut joukot ovat automaattisesti nousevassa järjestyksessä, aloitettiinpa jäsenten luetteleminen mistä sävelluokasta hyvänsä.

Intervallikon ilmaisemat intervallit ovat suunnattuja sävelluokkaintervalleja. Sävelluokkien a, b ja c välinen intervalliketju koostuu suunnatuista intervalleista b-a, c-b ja a-c. Jos a=0, b=1 ja c=3, niin intervallit ovat 1-0=1, 3-1=2 ja 0-3=-3=9. Joukon {0,1,3} peräkkäisten jäsenten välisten intervallien ketju koostuu intervalleista 1,2 ja 9. Intervallikko merkitään kahden väliviivan väliin, joten esimerkin intervallikko kirjoitetaan -129- (äännetään yksi, kaksi, yhdeksän, ei satakaksikymmentäyhdeksän). Intervallien välillä käytetään pilkkua vain jos se on selvyyden vuoksi tarpeen, kuten joukon {0,1,2} intervallikossa -1,1,10-.

Edellisestä esimerkistä saattoi huomata, että kolmen jäsenen välille syntyi kolme intervallia, sillä itseensäkiertyvässä I-avaruudessa myös joukon {0,1,3} äärijäsenet ovat *peräkkäisiä* (rinnakkaisia). Ympyrälle sijoitetusta joukosta tämä näkyy helposti. Kaksijäsenisen joukon jäsenten välille syntyy kaksi intervallia, nelijäsenisen joukon peräkkäisten jäsenten välille neljä jne. Intervallikossa on aina yhtä monta intervallia kuin on jäseniä joukossa jonka jäsentenvälisiä etäisyyksiä se kuvaa. Koska intervallikon intervallit ylettyvät aina koko sävelluokkaympyrän ympäri, on niiden summa joukon koosta riippumatta kaikissa olosuhteissa 12.

Esimerkissä 14 a-d on kuvattuna joukkoja sävelluokkaympyrällä. Sävelluokkien väleissä olevat reunustetut numerot muodostavat yhdessä intervallikon, jolla siis on kaksi mahdollista merkintätapaa, symbolien -- väliin sijoitettu vaakasuora numerojono sekä sävelluokkaympyrän sisäpuolelle kirjoitettu "numerokehä". Vastedes tullaan käyttämään molempia tapoja.[26]

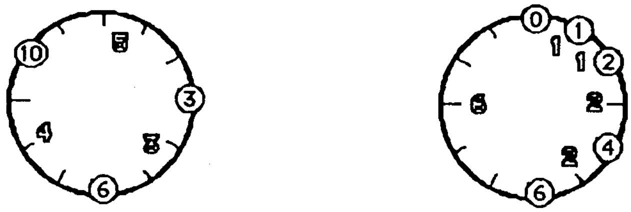
Esim. 14 a Esim 14 b Esim. 14 c Esim. 14 d



Esimerkki 15 : joukolle {3,6,10} määritellään intervallikko. Joukko on nousevassa järjestyksessä. 3:sta 6:een on 3 puolisävelluokka-askelta, kuutosesta 10:een 4 ja 10:stä takaisin 3:een 5 puolisävelluokka-askelta. Intervallikko on -345-. (Esim 15).

Esimerkki 16: joukolle {2,1,4,0,6} määritellään intervallikko. Nouseva järjestys nollasta alkaen on {0,1,2,4,6}. 0:n ja 1:n välinen intervalli on 1, 1:n ja 2:n välinen intervalli on niinikään 1. 2:n ja 4:n välinen intervalli on 2, 4:n ja 6:n välinen intervalli on myös 2. Etäisyys myötäpäivään sävelluokasta 6 ympyrän ympäri takaisin nollaan tuotaa intervallin 6. Nollasta alkavaan nousevaan järjestykseen asetetun joukon {0,1,2,4,6} intervallikko on -11226-. (Ks. esim.16).

Esim. 15 Esim. 16



1. 2.11.2. intervallikon sykliset permutaatiot

Sävelluokkaympyrän kehän jakautumista osoittavasta intervallikosta ei sen itseensäkiertyvyyden vuoksi voi osoittaa sen enempää alku- kuin päätekohtaakaan. Intervallikko voidaan lukea alkaen mistä intervallista (intervallikon jäsenestä) tahansa tai kirjoittaa vaakasuoraksi oikaistussa numerojonoesityksessä alkaen mistä jäsenestä tahansa. Tällöin muodostuvat järjestykset ovat intervallikon *syklisiä permutaatioita* (cyclic permutations, cyclical permutations). Niitä on aina paljon kuin intervallikossa on jäseniä. Syklistä permutaatiota ei tule sekoittaa Hämeenniemen permutaatioperheen käsitteen kanssa, jolla tarkoitetaan eri asiaa.[27]

Jos intervallikkoa ei merkitä sävelluokkaympyrälle vaan numerojonoksi symbolien - - väliin, on hyvä pitää mielessä, että useat ensi silmäyksellä eri intervallikoilta näyttävät lukujonot saattavat osoittautua saman intervallikon syklisiksi permutaatioiksi. Esim. erään nelijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -2145-, -1452-, -4521- ja -5214-.

Joukkojen sykliset permutaatiot muodostuvat samalla tavalla. Esimerkiksi joukon {a,b,c,d} sykliset permutaatiot ovat {a,b,c,d}, {b,c,d,a}, {c,d,a,b} ja {d,a,b,c}.

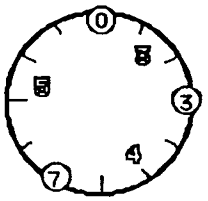
1. 2.11.3. käänteisintervallikot

Erään kolmijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -345-, -453- ja -534-.

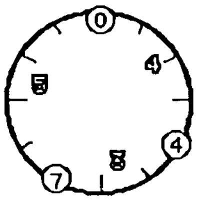
Erään toisen kolmijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot puolestaan ovat -435- , -354- ja -543-. Kyseessä on kaksi eri intervallikkoa, sillä yksikään ensimmäisen intervallikon syklisistä permutaatioista ei ole samanlainen toisen intervallikon yhdenkään syklisen permutaation kanssa. Mutta on helppo huomata, että jokaista ensimmäisen intervallikon syklistä permutaatiota vastaa toisen intervallikon syklinen permutaatio oikealta vasemmalle, takaperin luettuna. Tai yhtä hyvin, sävelluokkaympyräesityksessä intervallikot ovat identtisiä kun toinen luetaan myötä- ja toinen vastapäivään.

Esimerkissä 17 a on ensiksimainittu intervallikko sijoitettuna sävelluokkaympyrälle. (Valitaan jokin permutaatio ja jokin "aloitussävelluokka" ja sijoitetaan muut sävelluokat intervallikon jäsenten osoittamien etäisyyksien mukaisesti). Esimerkissä 17 b on jälkimmäinen intervallikko sijoitettuna sävelluokkaympyrälle. Joukon {0,3,7} R-avaruudelliset ilmentymät ovat c-mollikolmisointuja, joukon {0,4,7} C-duurikolmisointuja.

Esim. 17 a



Esim. 17 b



Intervallikot ovat toistensa *käänteisintervallikoita*. Joukot joiden intervallikoiden välillä vallitsee tällainen suhde ovat vastaavasti käänteisjoukkoja.

Jokainen intervallikko voidaan haluttaessa lukea numerojonoesityksessä oikealta vasemmalle tai sävelluokkaympyrällä vastapäivään käänteisintervallikon löytämiseksi. Jos kaikki oikealta vasemmalle/vastapäivään luetut sykliset permutaatiot ovat erilaisia kuin vasemmalta oikealle/myötäpäivään luetut, voidaan tehdä tärkeä havinto koskien kaikkia niitä joukkoja, joilla on intervallikkonaan jompikumpi tutkituista käänteisintervallikoista: ne ovat *epäsymmetrisiä*.

Usein voidaan huomata, että jokaista intervallikon oikealta vasemmalle/vastapäivään luettua syklistä permutaatiota kohden on samanlainen vasemmalta oikealle/myötäpäivään luettu: intervallikko on sama etu- ja takaperin. Kaikki tällaisen intervallikon omaavat joukot ovat *käänteissymmetrisiä*. Kaikille inversiosymmetrisille joukoille on ominaista, että jonkin I-avaruudellisen akselin tai joidenkin I-avaruudellisten akselien suhteen käännettäessä ne ovat oma käänteisjoukkonsa. Symmetrioihin palataan tuonnempana useissa yhteyksissä.

1. 2.12. NORMAALIJÄRJESTYS

Intervallikkojen syklisten permutaatioiden keskinäisestä yhdenvertaisuudesta huolimatta on useimpien operaatioiden kannalta perusteltua muotoilla sopimuksenvarainen kriteeristö, jonka avulla jokaista intervallikkoa edustamaan voidaan valita yhdenmukaiset järjestysnormit täyttävä syklinen permutaatio. Järjestysnormit täyttävän syklisen permutaation nimi on *normaalijärjestys* (normal order, normal form).

Normaalijärjestyksen etsiminen syklisten permutaatioiden joukosta on pienen harjoittelun jälkeen yksinkertainen operaatio. Sensijaan normaalijärjestyksen käsitteen tarjoaman hyödyn mieltäminen on kenties joukkoteorian perusteiden vaikein asia. Tämä johtuu siitä, että normaalijärjestys on täysin joukkoteorian sisäinen käsite, jolla ei ole mitään musiikillista erityisasemaa. Se hyödyttää muita joukkoteoreettisia operaatioita, ei minkään yksittäisen musiikillisen tilanteen hahmottumista. Joten niin kauan kuin "muut joukkoteoreettiset operaatiot" ovat opiskelijalta salattua viisautta, hänen täytyy kamppailla materian kitkaa vastaan opiskellessaan asiaa jonka tulevasta hyödystä hänellä ei ole tietoa. Normaalijärjestyksen käsitteen esille ottaminen ennen pidemmällevietyjen operaatioiden esittelemistä on kuitenkin välttämätöntä, sillä kaikkien syklisten permutaatioiden joukolla operoiminen ei tuo intervallikoiden tarkasteluun lisää informaatiota, ainoastaan eksyttävän vaihtoehtojen paljouden.

Toisistaan hieman poikkeavia normaalijärjestyskriteeristöjä on kirjallisuudessa esitelty useita.[28]

Toiset näistä tavoista esitetään yksinomaan joukkojen, toiset taas intervallikkojen avulla. Käytännössä tällä erolla ei kuitenkaan ole merkitystä, sillä sekä joukko- että intervallikkotavat perustuvat samanlaiseen intervallirakenteen hyväksikäyttöön. Joukon normaalijärjestystä ratkaistaessa selvitetään sen intervallikko ja intervallikolle normaalijärjestys. Tämän jälkeen tarvitsee vain katsoa, mikä *joukon* syklisistä permutaatioista on sellainen, että sen jäsentenvälinen intervalliketju vastaa normaalijärjestyksistä intervallikkoa. Joukon puolelta siis koukataan intervallikon puolelle ja takaisin. Intervallikkoa puolestaan voi käsitellä joukosta riippumatta.

Lähtökohdiltaan eri kriteeristöt ovat varsin samansuuntaisia, mutta useissa tapauksissa ne kuitenkin osoittavat intervallikon/joukon normaalijärjestykseksi eri syklisen permutaation. Lisäksi Regener ja Hämeenniemi luettelevat intervallikkonsa muiden käytäntöihin verrattuna päinvastaisessa järjestyksessä.

Kullakin normaalijärjestyksen määritysmetodilla on tavallaan kaksi puolta. Ensimmäinen on itse algoritmi, sen yksiselitteisyys ja "muodollinen eleganssi". Toinen on normaalijärjestyksen käyttökelpoisuus, se onko valittu muoto käytännöllisin mahdollinen. Ensimmäinen aspekti on yleensä saanut osakseen kaiken huomion, käytännöllisyysnäkökohtien jäädessä toissijaisiksi. Algoritmien olemus ei kuitenkaan ole mikään itseisarvo. Jokainen niistä on mahdollista oppia suhteellisen vähällä vaivalla. Tärkeintä on lopulta se, kuinka normaalijärjestys toimii.

Tämän vuoksi olen aikeissa kasvattaa normaalijärjestyksen etsimiseen käytettävien kriteeristöjen määrää vielä yhdellä, esittämällä omani. Sitä tullaan vastedes käyttämään tässä esityksessä. Sen algoritmi ei kenties ole yhtä elegantti kuin vaikkapa Regenerin menetelmän, mutta otin sen käyttöön, koska koin sen tarjoaman käänteisintervallikkojen normaalijärjestysten välittömän yhteyden työskentelyä helpottavaksi. Normaalijärjestyksen tultua määritellyksi ovat kaikki intervallikot ja joukot normaalijärjestyksessä, ellei erikseen toisin mainita.

Em. normaalijärjestyskriteereillä on se yhteinen piirre, että pääseminen niiden avulla tietystä normaalijärjestyksestä käänteisintervallikon normaalijärjestykseen ei ole välttämättä mutkaton toimenpide. Usein käänteisintervallikon normaalijärjestys selviää yhdellä silmäyksellä, joskus se taas vaatii monivaiheisen operaation. Alkuperäisen normaalijärjestyksen ja käänteisintervallikon normaalijärjestyksen muodostaminen toisistaan ei ole riittävän yksinkertaista, vaan siihen on kiinnitettävä aktiivista huomiota. Tämä ei ole toivottavaa, sillä intervallikon kääntäminen on niin usein toistuva operaatio, että kitkan soisi sen yhteydessä pysyvän mahdollisimman pienenä.

Esimerkkitapauksena määritellään käänteisintervallikkoparin normaalijärjestykset Forten kriteereitä noudattaen. (Forte käyttää joukkoja, joten tilanne on siirretty intervallikkotasolle). Lähtökohtana on, että normaalijärjestyksessä suurin intervalli luetellaan (numerojonoesityksessä) viimeisenä. Jos suurimpia intervalleja on useita, valitaan syklinen permutaatio, jossa on jokin niistä viimeisenä ja mahdollisimman pieni ensimmäisenä. Jos edelleen kaksi syklistä permutaatiota täyttää vaatimukset yhtä hyvin, valitaan se jonka toinen intervalli on pienempi jne.

Esimerkki-intervallikossa on suurimpia jäseniä kaksi, joten normaalijärjestysehdokkaitakin on kaksi, sykliset permutaatiot -1112313- ja -1311123-. Molempien ensimmäinen jäsen on ykkönen, joten normaalijärjestykseksi valikoituu pienemmän toisen intervallinsa ansiosta -1112313-. Olisi käytännöllistä voida kirjoittaa suoraan tästä muodosta käänteisintervallikon normaalijärjestys, mutta kriteereiden mukaan tällöinkin on kaksi vaihtoehtoa, joten on suoritettava vertailu. Vaihtoehdot ovat -1321113- ja -2111313-. Edellinen on normaalijärjestys, sillä ensimmäinen intervalli on pienempi. Jos intervallikon suurimpia intervalleja on useampia, on tutkittavia vaihtoehtojakin enemmän. Esimerkiksi intervallikon -113133- normaalijärjestystä ja sen käänteisintervallikon normaalijärjestystä ratkaistaessa on tarkastettava kuusi syklistä permutaatiota.

Omassa kriteeristössäni tähtäsin siihen, että kerran ratkaistusta normaalijärjestyksestä päästään suoraan käänteisintervallikon normaalijärjestykseen ilman välivaiheita. Kriteerit eivät eroa edellämainituista lainkaan niissä tapauksissa, joissa intervallikon suurin numeroarvo on vain yhdellä jäsenellä - näitä intervallikoita on 258 kappaletta kaikkiaan 351:stä intervallikosta. Tällöin normaalijärjestykseksi valitaan aina syklinen permutaatio, jossa suurin jäsen luetellaan viimeisenä. Käänteisintervallikon normaalimuoto löytyy automaattisesti pitämällä suurin jäsen paikoillaan ja kääntämällä muiden jäsenten järjestys päinvastaiseksi. Paikallaan pidettävälle jäsenelle olen antanut nimeksi intervallikon *vakio-osa*, alkupuolen muodostaessa *käänteisosan*.

Esimerkki 18: nelijäsen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -2145-, -1452-, -4521- ja -5214-. Suurin jäsen, 5, esiintyy vain kerran, joten normaalijärjestykseksi valikoituu automaattisesti syklinen permutaatio, jossa 5 on viimeisenä jäsenenä: -2145-. Viitonen jää paikalleen vakio-osaksi ja käänteisosa 214 kääntyy muotoon 412. Intervallikon -2145- käänteisintervallikon normaalijärjestys on -4125-.

Esimerkki 19: viisijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -51132- , -11325- , -13251- , -32511- ja -25113-. Suurin jäsen, 5, esiintyy vain kerran, joten viitoseen päättyvä syklinen permutaatio on normaalijärjestys: -11325-. Viitonen on vakio-osa ja käänteisosan kääntyessä muotoon 2311 on intervallikon -11325- käänteisintervallikon normaalijärjestys -23115-.

Niitä 93:a tapausta varten, joissa intervallikon suurin numeroarvo on useammalla kuin yhdellä jäsenellä, muotoillaan kolme yksinkertaista kriteeriä. Niiden välillä on hierarkia. Jos normaalijärjestys selviää kriteerillä 1) ei muita tarvitse soveltaa. Jos kriteeriä 2) joudutaan soveltamaan ja normaalijärjestys selviää sillä, ei kriteeriä 3) tarvitse soveltaa.

1) *etsitään intervallikon numeroarvoltaan suurimpien intervallien rajaama symmetrinen intervallikon osa.*

Niissä tapauksissa joissa suurimpien intervallien rajaamia symmetrisiä intervallikon osia on useita

2) *etsitään suurimpien intervallien rajaama symmetrinen intervallikon osa, jossa suurimman intervallin vieressä oleva symmetriaan kuuluva intervalli on numeroarvoltaan mahdollisimman suuri.*

Jos tämän vaatimuksen yhtä hyvin täyttäviä muotoja on useita, valitaan se, jossa *seuraava* symmetriaan kuuluva intervalli on mahdollisimman suuri jne.

Niissä tapauksissa, joissa kriteerin 2) yhtä hyvin täyttäviä intervallikon symmetrisiä osia on useampia, ja ne ovat *keskenään* symmetrisissä asetelmissa jotka myös *kokonaisuutena* toteuttavat toisen kriteerin yhtä hyvin kuin yksittäiset osat

3) *valitaan laajin kriteerin* 2) *toteuttava vaihtoehto*

Näillä kriteereillä määritelty intervallikon symmetrinen osa on kaikissa olosuhteissa yhteinen sekä intervallikolle että sen käänteisintervallikolle. Osasymmetria "ankkuroidaan" *monijäseniseksi vakio-osaksi* molempien toisiinsa käänteisesti suhtautuvien intervallikoiden loppuun - numerojonoesityksessä intervallikkojen oikeaan reunaan - ja käänteisintervallikon normaalijärjestyksen selvittämiseksi tarvitsee vain kirjoittaa käänteisosa lopusta alkuun.

1)

Esimerkki 20: nelijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -4134-, -1344- , -3441- ja -4413-. Intervallikon ainoa suurimpien intervallien rajaama symmetrinen osa on 44. Suurimpien intervallien väliin ei jää yhtään jäsentä, vaan osasymmetriaan osallistuvat vain neloset itse. (Toinen mahdollinen nelosten rajaaman "haarukan" tuottama muoto -4134- ei ole symmetrinen, sillä se on erilainen kuin sen käänteinen muoto -4314-). Normaalijärjestykseksi valitaan syklinen permutaatio, jossa neloset ovat rinnakkain viimeisinä, -1344-. 44 muodostaa vakio-osan ja 13 käänteisosan. Käänteisintervallikon normaalijärjestys on -3144-.

Esimerkki 21 : viisijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -24141-, -41412-, -14124-, -41241- ja -12414-.
Intervallikossa on suurimpien intervallien rajaama osasymmetria 414. Se sijoittuu viimeiseksi syklisessä permutaatiossa -12414-, joka valikoituu normaalijärjestykseksi. 414 on vakio-osa ja 12 käänteisosa. Käänteisintervallikon normaalijärjestys on -21414-.

Esimerkki 22: seitsemänjäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -1231113-, -2311131-, -3111312-, -1113123-, -1131231-, -1312311- ja -3123111-. Suurimmat intervallit rajaavat symmetrisen intervallikon osan 3113 vakio-osaksi. Normaalijärjestykseksi valikoituu vakio-osan intervallikon loppuun sijoittava syklinen permutaatio -1231113-. Käänteisintervallikon normaalijärjestys selviää kääntämällä käänteisosa 12 päinvastaiseksi: -2131113-.

93:sta tapauksesta, joissa intervallikon suurin numeroarvo on useammalla kuin yhdellä jäsenellä, selviää kriteerin 1) avulla 27:n intervallikon normaalimuoto.

2)

Esimerkki 23: viisijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -14241-, -42411-, -24114-, -41142- ja -11424-.

Intervallikossa on kaksi suurimpien intervallien rajaamaa osasymmetriaa, 424 ja 4114. Kriteerin 2) mukaisesti valikoituu vakio-osaksi vaihtoehto *jossa suurimman intervallin vieressä oleva symmetriaan kuuluva intervalli on numeroarvoltaan mahdollisimman suuri* eli vaihtoehto 424. Kakkonen on suurempi kuin toisessa vaihtoehdossa nelosen vieressä oleva ykkönen - se että kakkonen on nelosten välissä yksinään mutta ykköset kahden ei muuta asiaa. Normaalijärjestykseksi valikoituu syklinen permutaatio, jossa 424 on lopussa eli -11424-. Kun käänteisosa 11 käännetään se pysyy itsenään. Kyseessa on käänteissymmetrinen intervallikko.

Esimerkki 24: seitsemänjäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -3121311-, -1213113-, -2131131-, -1311312-, -3113121-, -1131213- ja -1312131-. Suurimmat intervallit rajaavat kaksi symmetristä intervallikon osaa, 3113 ja 31213. Molemmissa tapauksissa suurimman intervallin viereinen intervalli on sama, 1. Seuraava intervalli on vaihtoehdossa 3113 ykkönen ja vaihtoehdossa 31213 kakkonen. Suuremman intervallin vuoksi vakioosaksi valikoituu 31213 ja normaalijärjestykseksi syklinen permutaatio, jossa vakio-osa on intervallikon oikeassa laidassa: -1131213-. Koska käänteisosa 11 on symmetrinen, on intervallikkokin käänteissymmetrinen eli käänteisintervallikko on sama kuin kääntämätön.

Esimerkki 25: kuusijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -131331-, -313311-, -133113-, -331131-, -311313- ja -113133-. Intervallikossa on kolme suurimpien intervallien rajaamaa osasymmetriaa ja siten kolme vakio-osaehdokasta: 3113, 313 ja 33. Vakio-osaksi valikoituu vaihtoehto 33, sillä siinä on suurimman intervallin viereinen intervalli suurempi kuin muissa tapauksissa. Se että viereinen intervalli on samalla itsekin suurimman numeroarvon omaava intervalli ei muuta tilannetta: määritelmähän edellyttää vain viereisen intervallin kuuluvan symmetriaan, riippumatta siitä onko kyseessä symmetrian rajaava suurin intervalli vaiko suurimpien intervallien väliin jäävä pienempi. Normaalijärjestys on kolmosparin loppuun sijoittava syklinen permutaatio -113133-. Käänteisintervallikon normaalijärjestys on vastaavasti -131133-.

Kriteerin 2) avulla käsiteltävän tapausjoukon erikoistapauksia ovat intervallikot, joissa suurimpien intervallien rajaamat symmetriset intervallikon osat ovat identtisiä, kuten intervallikoissa -1515- (molemmat vakio-osavaihtoehdot 515), -2424- (vaihtoehdot 424) tai -114114- (vaihtoehdot 4114).

Tällöin on luonnollisesti samantekevää mikä vaihtoehdoista valitaan. 93 tapauksesta, joissa intervallikon suurin numeroarvo on useammalla kuin yhdellä jäsenellä, selviää kriteerin 2) avulla 43:n intervallikon normaalijärjestys.

3)

Esimerkki 26: eräällä kahdeksanjäsenisellä intervallikolla on vain kaksi erilaista syklistä permutaatiota, 4 kpl muotoa -12121212- ja 4 kpl muotoa -21212121-. Intervallikon suurimmat intervallit rajaavat useita keskenään samanlaisia symmetrisia intervallikonosia 212. Näistä voitaisiin valita mikä tahansa vakio-osaksi. Kuitenkin, jos näitä osia nivelletään kaksi peräkkäin, muotoon 21212, huomataan että ne täyttävät yhdessäkin kriteerin 2) yhtä hyvin kuin pelkkä 212: molemmissa tapauksissa suurinta intervallia seuraava symmetriaan kuuluvä intervalli on 1, jonka jälkeen molemmissa tapauksissa tulee 2. Muoto 21212 jatkuu kun 212 on jo "katsottu loppuun". Ja edelleen, jos 21- ketjua jatketaan muotoon 2121212, voidaan todeta että tämäkin intervallikon symmetrinen osa täyttää kriteerin 2) yhtä hyvin kuin vaihtoehdot 212 ja 21212. Kriteerin 3) perusteella valitaan vakio-osaksi *laajin kriteerin 2) toteuttava vaihtoehto* eli 2121212.

Näin kannatta menetellä luonnollisesti jo pelkästään sen vuoksi, että mahdollisimman laaja vakio-osa tuottaa mahdollisimman suppean käänteisosan, jolloin käänteisintervallikon muodostaminen on vaivattominta. (Tässä tapauksessa, kun normaalijärjestykseksi valikoituu syklinen permutaatio -12121212-, jää käänteisosaksi vain ensimmäinen ykkönen).

Intervallikon -12121212- tapauksessa ei laajimman vaihtoehdon valinnalla vakio-osaksi ollut siinä mielessä ratkaisevaa merkitystä, että myös vaihtoehdot 212 ja 21212 olisivat tuottaneet samanlaiset normaalijärjestykset. Näin ei kuitenkaan ole kaikissa tapauksissa.

Esimerkki 27: kahdeksanjäsenisen intervallikon satunnaisesti valittu syklinen permutaatio on -22122111-. Suurimmat intervallit rajaavat useita symmetrisiä intervallikon osia:22, 212, 22122, 21112 ja 2211122. Vaihtoehdot 212 ja 21112 putoavat vakio-osatarkastelusta heti, sillä niissä suurimman intervallin viereinen intervalli on pienempi kuin jäljellejäävissä vaihtoehdoissa. Muodot 22, 22122 ja 2211122 täyttävät suurimman intervallin viereisen intervallin kriteerin yhtä hyvin, mutta kriteeri 3) pudottaa muodon 22 pois sen lyhyyden vuoksi. Muodot 22122 ja 2211122 selviävät finaaliin. Ulommaisen kakkosen vieressä on molemmissa tapauksissa kakkonen ja edelleen sen vieressä molemmissa tapauksissa ykkönen. Seuraava vastaantuleva intervalli on vaihtoehdossa 22122 kakkonen ja vaihtoehdossa 2211122 ykkönen. 22122 toteuttaa suuremman intervallin vuoksi paremmin kriteerin 2) ja valikoituu vakio-osaksi. Intervallikon normaalijärjestys on siis syklinen permutaatio -11122122- ja sen symmetrinen käänteisosa 111. Edellisestä esimerkistä poiketen eri vakio-osaehdokkaat tuottaisivat erilaiset normaalijärjestykset.

Yksinkertaisia tämän kategorian tapauksia ovat ne intervallikot, joissa kaikki kriteerin 2) täyttävät vaihtoehdot koostuvat pelkästään suurimmista intervalleista.

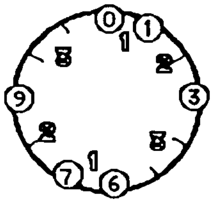
Esimerkki 28: viisijäsenisen intervallikon sykliset permutaatiot ovat -33123-, -31233-, -12333-, -23331- ja -33312-. Vierekkäiset kolmoset rajaavat kaksittain kaksi symmetristä vaihtoehtoa 33 ja yhdessä vaihtoehdon 333. Kaikki täyttävät kriteerin 2) yhtä hyvin, joten laajimpana valikoituu vaihtoehto 333. Normaalijärjestykseksi valikoituu kolmoset loppuun sijoittava syklinen permutaatio -12333-. Vakio-osan 333 pysyessä paikallaan tuottaa käänteisosa 12 käänteisintervallikon normaalijärjestykseksi -21333-.
Muutamissa intervallikoissa suurin intervalli on samalla ainoa: -444- (R-avaruudessa ylinouseva kolmisointu), -3333- (R-avaruudessa vähennetty septimisointu) ja -222222- (R-avaruudessa kokosävelasteikko). Koko intervallikko on yhtä vakio-osaa. Kriteerin 3) avulla selviää 20:n intervallikon normaalimuoto.

intervallikot, joissa suurimmat jäsenet eivät rajaa symmetrioita

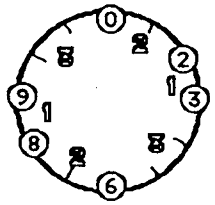
Kaikkien intervallikoiden joukossa on kolme intervallikkoa, joihin kuuluu enemmän kuin yksi numeroarvoltaan suurin jäsen, mutta joissa suurimmat jäsenet eivät rajaa yhtään symmetristä intervallikon osaa. Näiden kuusijäsenisten intervallikoiden eräät satunnaisesti valitut sykliset permutaatiot ovat -232131-, -312312- ja -213213-. Normaalijärjestysten määrittäminen näille intervallikoille ei kuitenkaan tuota vaikeuksia, sillä niihin voidaan soveltaa edelläesitettyjä periaatteita sopivilta osin.
Kriteerin 1) mukaisesti sijoitetaan suurin intervalli viimeiseksi, eli kullekin intervallikolle muodostuu kahdesta kolmosesta johtuen periaatteessa kaksi vaihtoehtoa.
Tapauksissa -123123- ja -213213- ovat kummankin intervallikon molemmat suurimman viimeisen jäsenen määrittämät sykliset permutaatiot keskenään identtiset, joten on sama kumpi valitaan. Koska vakio-osaksi ei voida määrittää kolmosten rajaamaa aluetta - se ei ole symmetrinen - on luontevaa toimia kuten yhden suurimman jäsenen intervallikoissa ja määritellä vakio-osaksi pelkästään viimeinen kolmonen. Käänteisosiksi muodostuvat 12312 ja 21321, jotka ovat toistensa peilikuvat. Normaalijärjestykset ovat -123123- ja -213213- ja intervallikot siis toistensa käänteisintervallikoita. Eräät näiden intervallikoiden avulla määritetyt joukot ovat nähtävissä sävelluokkaympyrällä esimerkin 29 kohdissa a) ja b).
Kolmas intervallikoista, joiden suurimmat jäsenet eivät rajaa symmetrioita, mahdollistaa kaksi erilaista suurimman viimeisen jäsenen syklistä permutaatiota: -123213- ja -213123. Normaalijärjestykseksi on luontevasti määritettävissä permutaatio -123213-, sillä a) vasemmalta oikealle päin eli ympyrällä myötäpäivään tarkasteltuna kolmosten rajaaman osan lähinnä suurinta intervallia oleva intervalli, 2, on suurempi kuin toisessa vaihtoehdossa sekä b) siinä on pienempi intervalli alussa. (Ensimmäinen ja toinen

kriteerihän tuottavat numerojonoesityksen alkupäähän useimmiten pieniä intervalleja, kuten myös muiden normaalijärjestysmetodien "suurin viimeiseksi ja pieniä alkuun" -kriteeri). Vakio-osaksi valitaan pelkkä kolmonen ja käänteisosaksi 12321, joka on symmetrinen. Eräs tämän intervallikon määrittämä joukko on nähtävissä esimerkin 29 kohdassa c).

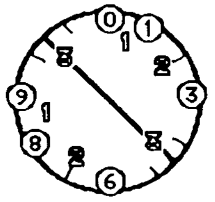
Esimerkki 29 a



Esimerkki 29 b



Esimerkki 29 c



1. 2.13. A- JA B-MUODOT

Samaan tapaan kuin yksittäisten intervallikoiden syklisistä permutaatioista voidaan valita yhdenmukaiset järjestysperiaatteet täyttävä normaalijärjestys, voidaan myös käänteisintervallikkoparien jäsenille osoittaa eräänlaiset lajityypit.

Koska käänteisintervallikoista käytetään normaalijärjestyksiä, tarvitsee huomiota kiinnittää vain intervallikoiden käänteisosiin. Vakio-osathan ovat kaikissa tapauksissa molemmille muodoille identtiset. Käänteisintervallikon muodot nimetään *A- ja B-muodoiksi.*

A-muodoksi valitaan vaihtoehto, jossa *numerojonoesityksessä vasemmalta oikealle tai ympyrällä myötäpäivään kuljettaessa käänteisosan ensimmäinen intervalli on pienempi.*

Jos molempien intervallikoiden käänteisosien ensimmäinen intervalli on yhtä suuri, A-muodoksi valitaan vaihtoehto jossa käänteisosan *toinen* intervalli on pienempi. Jos molempien intervallikoiden käänteisosissa myös toinen intervalli on yhtä suuri, valitaan A-muodoksi intervallikko jossa käänteisosan *kolmas* intervalli on pienempi jne. (Jos käänteisosat ovat samanlaisia loppuun saakka, on kysymyksessä käänteissymmetrinen intervallikko eikä A/B-erottelua tarvita).

Esimerkki 30: käänteisintervallikoiden -129- ja -219- käänteisosat ovat 12 ja 21. Koska muodossa 12 on ensimmäinen intervalli pienempi, tulee intervallikosta -129- A-muoto ja intervallikosta -219- B-muoto.

Esimerkki 31: käänteisintervallikoiden -1344- ja -3144- yhteinen vakio-osa on 44. Käänteisosat ovat 13 ja 31. Koska muodossa 13 on ensimmäinen intervalli pienempi, tulee intervallikosta -1344- A-muoto ja intervallikosta -3144- B-muoto.

Esimerkki 32: käänteisintervallikoiden -1121313- ja -1211313- yhteinen vakio-osa on 313. Käänteisosat ovat 1121 ja 1211. Molemmissa käänteisosissa on ensimmäisenä intervallina ykkönen. Muodossa 1121 on toinen intervalli pienempi kuin muodossa 1211, joten intervallikko -1121313- on A-muoto ja intervallikko -1211313- B-muoto.

Esimerkki 33: käänteisintervallikoiden -111121122- ja -112111122- yhteinen vakio-osa on 22. Käänteisosat ovat 1111211 ja 1121111. Molemmissa käänteisosissa on ensimmäisenä intervallina ykkönen. Myös toinen intervalli on molemmissa käänteisosissa ykkönen. Käänteisosassa 1111211 on kolmas intervalli, ykkönen, pienempi kuin käänteisosassa 1121111, jossa se on kakkonen. Intervallikko -111121122- on siten A-muoto ja intervallikko -112111122- B-muoto.

1. 2.14. NORMAALIJÄSEN

Useiden myöhemmin esiteltävien operaatioiden tarpeita silmälläpitäen sovitaan, että joukon normaalijärjestyksen ensimmäinen jäsen on nimeltään *normaalijäsen*.

1. 2.15. JOUKKOLUOKITUS

Joukkoluokka (set class, SC, collection class, set type, abstract set, chord, equivalence class, set group, harhaanjohtavasti jopa pitch-class set) on sävelluokkajoukoista muodostuva kokonaisuus, jossa kustakin kokonaisuuteen kuuluvasta joukosta on annetun operaation tai operaatioyhdistelmän avulla johdettavissa kaikki kokonaisuuteen kuuluvat joukot. Kukin joukkoluokka muodostaa suljetun yksikön joukkoavaruudessa. Sen *jäsenjoukkoja* ovat automaattisesti kaikki joukot jotka voidaan annetun operaation/operaatioyhdistelmän avulla johtaa toisistaan, eikä toisaalta yksikään muu joukko voi kuulua siihen.

Joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa määritellyt joukkoluokitustyypit voidaan jakaa kolmeen kategoriaan. Kriteereinä toimivat tällöin ne operaatiot, joita joukkoluokan määrittämiseen käytetään.

1. 2.15.1. joukkoluokkatyypit

Suppeimman määritelmän mukaan joukkoluokka on sävelluokkajoukoista muodostuva kokonaisuus, jossa kustakin jäsenjoukosta on johdettavissa kaikki jäsenjoukot *transponoinnin* avulla. John Rahnin tällaiselle joukkoluokalle antama nimitys *T_n-tyyppinen* eli *transpositionaalinen* joukkoluokka on laajalti käytetty.[29] Robert Morrisin termi on SG(1) eli Set-group(1).[30]

Transpositionaalisia joukkoluokkia on 352 kappaletta. Niitä on yksi enemmän kuin intervallikkoja, sillä tyhjällä joukolla ja siitä muodostuvalla tyhjällä joukkoluokalla ei ole intervallikkoa. Tämän määrittelyn pyrkimyksenä on taata, että joukkoluokka on mahdollisimman tarkkarajainen ja jäsenjoukkojensa ominaisuuksilta yksiselitteinen kokonaisuus. Vastaavasti jäsenjoukkojen määrä pysyy pienenä. Se on korkeintaan sama kuin transpositioiden määrä eli 12. Kaikilla tällaisen joukkoluokan jäsenjoukoilla on sama intervallikko. Esimerkiksi kaikki duurikolmisoinnut muodostavat erään T_n-tyyppisen joukkoluokan. Jäsenjoukoille voidaan osoittaa sijainti joukkoluokassa niiden normaalijäsenen numeroarvon mukaan. Täten esimerkiksi kaikki joukot, joiden normaalijäsenten numeroarvo on 7, ovat joukkoluokkiensa 7. jäsenjoukkoja jne.[31] (Ks. kohta 2.16. *Primaarimuoto*).

Astetta väljemmän määritelmän mukaan joukkoluokka on sävelluokkajoukoista muodostuva kokonaisuus, jossa kustakin jäsenjoukosta on johdettavissa kaikki jäsenjoukot *kääntämisen* ja/tai *transponoinnin* avulla. Rahnin nimitys on *T_n/T_nI-tyyppinen* joukkoluokka.[32] Morrisin termi on SG(2). T_n/T_nI-tyyppinen joukkoluokka muodostuu joukosta, sen kaikista transpositioista, sen käännöksestä akselin 0-6 suhteen ja käännöksen kaikista transpositioista. (Tai toista inversion määrittelyä hyödyntäen: sen käännöksistä kaikkien 12:n I-avaruudellisen akselin suhteen). T_n/T_nI-tyyppiseen joukkoluokkaan kuuluu täten kaksi toisiinsa käänteisesti suhtautuvaa T_n-tyyppistä joukkoluokkaa eli *käänteisjoukkoluokkaa*. Mm. duuri- ja mollikolmisoinnut muodostavat yhdessä yhden T_n/T_nI-tyyppisen joukkoluokan. Jäsenjoukkoja on enemmän kuin T_n-tyyppisessä joukkoluokassa, korkeintaan 2*12 eli 24. Joukkoluokkien kokonaismäärä on vastaavasti pienempi, 224. Tällaisella joukkoluokalla on kaksi intervallikkoa, jotka ovat luonnollisesti käänteisintervallikkopari. Tietty intervallikko on yhteinen puolelle joukoista.
T_n/T_nI-tyyppinen joukkoluokitus (ja sen myötä käänteisjoukkoluokkien käsitteleminen yhtenä yksikkönä) on yleisin luokitustyyppi. Perusteluna käänteisten joukkoluokkien yhdistämiselle on se, että käänteisyyttä ei tulkita suhteeksi vaan samuudeksi: "Accordingly, two pc sets will be said to be *equivalent* if and only if they are reducible to the same prime form by transposition or by inversion followed by transposition".[33]

Kolmannen, väljimmän ja vähiten käytetyn joukkoluokitustyypin mukaan joukkoluokka on sävelluokkajoukoista muodostuva kokonaisuus, jossa kustakin jäsenjoukosta on johdettavissa kaikki jäsenjoukot *M1-, M5-, M7 ja M11 -operaatioiden tulosten transponoinnin* avulla. M1-, M5-, M7- ja M11-operaatioissa (M = multiplication = kertominen, kertolaskun suorittaminen) on kysymys sävelluokkien numeroarvojen kertomisesta yhdellä, viidellä, seitsemällä ja yhdellätoista mod 12. Tämän ensialkuun kenties väkinäiseltä tuntuvan käytännön takana on tietty matemaattinen havainto: kun kaikkien sävelluokkien numeroarvot kerrotaan ensin nollalla, sitten ykkösellä, kakkosella, kolmosella jne. aina yhteentoista saakka, tuottavat kertojat 1, 5, 7 ja 11 ainoina tulojen joukon, johon kuuluvat kaikki kaksitoista numeroarvoa välillä 0-11. Kaikki muut kertojat tuottavat suppeamman tulojen joukon. (Esimerkiksi sävelluokkien numeroarvojen kertominen 3:lla tuottaa järjestyksessä tulot 0,3,6,9,0,3,6,9,0,3,6 ja 9.)

M1 on ns.*identiteettioperaatio* (identity operation), sillä se säilyttää sävelluokkien numeroarvot ennallaan. M1 {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} = {0,1,2,3,4,5,6, 7,8,9,10,11}.

M5 on "kvarttiympyräoperaatio" (circle-of-fourths, circle of fourths transform). Se järjestää kromaattisen asteikon sävelluokkaympyrällä myötäpäiväiseksi kvarttiketjuksi, M5 {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} = {0,5,10,3,8,1,6,11,4,9, 2,7}.

M7 on vastaavasti "kvinttiympyräoperaatio" (circle-of-fifths, circle of fifths transform). Se järjestää kromaattisen asteikon sävelluokkaympyrällä myötäpäiväiseksi kvinttiketjuksi. M7 {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} = {0,7,2,9,4,11,6,1,8,3, 10,5}. M5 ja M7 ovat toistensa käänteisoperaatioita. Jos jonkin joukon sävelluokat kerrotaan vuoroin viidellä ja seitsemällä, ovat syntyvät joukot aina toistensa käännökset akselin 0-6 suhteen.

M11 vastaa käännösoperaatiota akselin 0-6 suhteen. Sävelluokka x tuottaa yhdellätoista kerrottuna käännesävelensä (12-x). (M11 on siis jälleen uusi tapa määritellä kääntäminen: joukon kaikki jäsenet kerrotaan yhdellätoista). M11{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} ={0,11,10,9,8, 7,6,5,4,3,2,1}. M1 ja M11 ovat käänteisoperaatioita.

Jotkut kirjoittajat tulkitsevat M1-, M5-, M7- ja M11-operaatioiden ominaisuuden säilyttää kaikkien sävelluokkien joukko 12-yksikköisenä niin tärkeäksi yhteiseksi piirteeksi, että he määrittelevät niiden avulla muodostettujen joukkojen välille samuuden, aivan kuten T_n/T_nI-tyyppisessä joukkoluokituksessa määriteltiin samuus käännmösmuotojen välille. Toisinaan myöskin näkee esitettävän epäilyjä M-operaatioiden avulla yhdistettävien joukkojen rakenteellisesta tai kuulonvaraisesta yhteydestä, vaikka näkökulman muodollinen eheys tunnustetaankin.

Esimerkki 34: joukon {0,1,3} sävelluokat kerrotaan yhdellä, viidellä, seitsemällä ja yhdellätoista. M1{0,1,3} = {0,1,3}, M5{0,1,3} = {0,5,3} = {0,3,5}, M7{0,1,3} = {0,7,9} ja M11{0,1,3} = {0,11,9} = {0, 9,11}. Operaatiot tuottivat 4 joukkoa joista jokainen voidaan transponoida intervalleilla 0-11 (nollalla transponoiminen on M1:n tavoin identiteettioperaatio). Joukkoluokkaan kuuluu siten 4 T_n-tyyppistä joukkoluokkaa, jotka ovat pareittain käänteisjoukkoluokkia. Jäsenjoukkoja on 48, ja kullakin on intervallikkonaan jokin seuraavasta neljästä: -129-, -219-, -237- tai -327-.

Morrisin tällaiselle joukkoluokalle antama nimi on SG(3). Nimityksiä ja merkintätapoja on muitakin. Näitä joukkoluokkia on ainoastaan 158. Tässä esityksessä ei M-operaatioita hyödynnetä.[34]

Allen Forte on yhdistänyt joukkoja myös muun kuin tietyn operaation/ operaatioyhdistelmän avulla, käyttäessään kriteerinä yhteistä intervallivektoria.[35] Tällöin yhdistyvät Z-suhteiset joukkoluokat, joita ei voi saattaa toisikseen transposition, käännöksen tai niiden yhdistelmän avulla. Morris nimittää täten muodostettuja joukkoluokkia nimellä SG(v). Forte on myöhemmiten katunut luokitustaan[36] ja pitäytynyt transponoinnin ja kääntämisen avulla määritellyissä joukkoluokissa.[37]

1. 2.15.2. joukkoluokan koko

Kukin joukkoluokka koostuu tietystä määrästä jäsenjoukkoja, ja kukin jäsenjoukko puolestaan tietystä määrästä sävelluokkia. Jotta nämä kaksi toisistaan riippumatonta joukkoluokan koon komponenttia eivät menisi sekaisin, sovitaan käytettävistä ilmaisuista.

Joukkoluokka, jossa on n kappaletta jäsenjoukkoja on *n-jäsenjoukkoinen* joukkoluokka. Joukkoluokka, jonka kukin joukko koostuu n kappaleesta sävelluokkia on *n-jäseninen* joukkoluokka. Joukon kokoa merkitsevä ylennysmerkki # viittaa myös joukkoluokkiin sovellettuna kunkin jäsenjoukon sävelluokkien määrään. Esimerkiksi merkintä #T > #S tarkoittaa, että joukkoluokan T jäsenjoukot koostuvat useammista sävelluokista kuin joukkoluokan S jäsenjoukot. Vastaavasti epämuodollinen ilmaus "suurempi joukkoluokka T / pienempi joukkoluokka S" viittaa joukkojen sävelluokkien eikä jäsenjoukkojen määriin.

Tarkoitettaessa esimerkiksi "epäsymmetrisistä joukoista muodostuvaa joukkoluokkaa" tai "käänteissymmetrisistä joukoista muodostuvaa joukkoluokkaa" jne. sanotaan pitkien ilmaisujen välttämiseksi yksinkertaisesti epäsymmetrinen joukkoluokka tai käänteissymmetrinen joukkoluokka.

1. 2.16. PRIMAARIMUOTO

Joukkoluokan jäsenjoukko, jonka normaalijäsenen numeroarvo on nolla, on nimeltään *primaarimuoto*. Sitä käytetään usein jäsenjoukkojen edustajana eri operaatioissa.

1. 2.17. TÄSSÄ ESITYKSESSÄ KÄYTETTÄVÄ JOUKKOLUOKITUS

Olen valinnut joukkoluokituksen perusyksiköksi transpositionaalisen joukkoluokan. Tällöin on kaikilla jäsenjoukoilla identtinen intervallikko, josta seuraa että yhdellä intervallikolla voi kuvata koko joukkoluokkaa. Ja edelleen, intervallikon ja normaalijäsenen yhdistelmän avulla voidaan osoittaa yksittäistä jäsenjoukkoa. Merkintätavaksi sovitaan intervallikko, kauttaviiva ja normaalijäsen.

Esimerkiksi -1128-/3 = {3,4,5,7}. (3 on normaalijäsen. 3+1=4, 4+1= 5, 5+2=7 ja ympyrän kehän sulkee 7+8=15=3). Chrisman on käyttänyt hieman samantapaista merkintätapaa, sijoittaen intervallikon eteen suluissa toisinaan sävelluokan, toisinaan nuottinimen.[38]

Halusin kuitenkin hyödyntää myös Allen Forten joukkoluokille antamia nimiä, niiden tultua joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa laajasti käyttöönotetuiksi.[39] Esimerkiksi nimessä 4-19 ennen väliviivaa oleva nelonen viittaa joukkoluokan jäsenjoukkojen kokoon, väliviivan jälkeen oleva 19 joukkoluokan järjestysnumeroon nelijäsenisten joukkoluokkien keskuudessa. Järjestyskriteerit on johdettu intervallivektoreista. Forte ei ole antanut nimiä joukkoluokille, joiden jäsenjoukot ovat alle 3- tai yli 9-jäsenisiä. Joidenkin kirjoittajien teksteissä on myös näille joukkoluokille annettu

Forte-luokitusta vastaava nimi, ja olen seurannut tätä käytäntöä. Vastaisuudessa tullaan siten viittaamaan joukkoluokkiin 0-1, 1-1, 2-1, 10-1, 11-1, 12-1 jne.[40]

Koska Forten luokituksessa käänteisjoukkoluokat on sijoitettu yhteisen nimen alle, tarvitaan lisämääreitä jotta voitaisiin aina tarvittaessa yksiselitteisesti osoittaa niistä jompaakumpaa. Tarvittavat kriteerit on edellä jo esitetty A- ja B-tyyppisten intervallikoiden yhteydessä. Joukkoluokka jonka yhteinen intervallikko edustaa A-tyyppiä on *A-tyyppinen joukkoluokka*, ja joukkoluokka jonka yhteinen intervallikko edustaa B-tyyppiä on *B-tyyppinen joukkoluokka*. Jos jokin tehtävänasettelu sallii käänteisjoukkoluokkien käsittelyn yhdessä, voidaan puhua *A/B-tyyppisestä joukkoluokasta* tai lyhyemmin vain *A/B-joukkoluokasta*.

Käyttöönottamani luokitus muistuttaa paljon Rahnin T_n- ja T_n/T_nI-tyyppistä luokitusta. A- ja B-tyyppiset ovat tahoillaan T_n-tyyppisiä, A/B-tyyppinen tahollaan T_n/T_nI-tyyppinen. Erona on oman luokitukseni nimitysten "absoluuttisuus" ja Rahnin luokituksen nimitysten "relatiivisuus". Jonkin T_n-tyyppiseen joukkoluokkaan kuuluvan joukon käännökset muodostavat tuon joukon kannalta katsottuna käänteisjoukkoluokan, "T_nI-luokan". Jos taas näkökulma vaihdetaan käänteisjoukkoluokan puolelle, muodostaakin äskeinen joukko transpositioineen nyt "T_nI-luokan". Nimityksiä ei siis ole ankkuroitu puoleen eikä toiseen, ne viittaavat käänteisyyteen yleensä. Pysytteleminen käänteisjoukkoluokkien relatiivisessa nimeämisessä on toki tietoinen päätös, sillä sekä Rahnilla että Fortella tarjoaisi käänteisjoukkoluokkien *yhteisen* primaarimuodon määrittämiseksi annettu kriteeristö välineen joukkoluokkien absoluuttiselle nimeämiselle.[41] Tätä valmiutta ei yhteisen primaarin käytön lisäksi kuitenkaan muissa yhteyksissä käytetä.

Asetelma on hiukan samantapainen kuin jos tiedettäisiin kolikon puolten nimiksi kruuna ja klaava, mutta sanottaisiin silti "tämä puoli" ja "se puoli joka on tämän puolen toisella puolella". Näkisin tämän lukkoonlyödyistä joukkoluokkien ja yksittäisten joukkojen nimityksistä pidättäytymisen - esim. Rahn ja Forte eivät puhu tietystä joukosta joukkoluokkansa kolmantena, viidentenä tms. jäsenjoukkona - johtuvan halusta taata analyysitilanteessa mahdollisimman neutraali lähtöasetelma. Tällöin voidaan etukäteen määrättyjen joukkoluokka- ja jäsenjoukkonimitysten häiritsemättä valita jokin keskeiseksi tulkittu joukko nollatranspositioksi t. *perusjoukoksi*[42] ja kuvata transposition ja/tai käännöksen avulla muut T_n/T_nI-luokan jäsenjoukot sen johdannaisina tai suhteessa siihen.

Toisaalta, oman kokemukseni mukaan absoluuttisen nimen antamisesta jokaiselle joukkoluokalle on huomattavaa hyötyä. Ensinnäkin voidaan ilman tulkinnanvaraisuuksia osoittaa yhtä tiettyä transpositionaalista joukkoluokkaa: 4-19 B. Tämän seurauksena voidaan antaa "sukunimi" myös jokaiselle yksittäiselle jäsenjoukolle: {11,2,3,7} = -3144-/11 = 4-19 B/11. (Joukkoluokan nimen jälkeen kirjoitettavan kauttaviivan oikealla puolella oleva numero on jälleen jäsenjoukon normaalijäsenen numeroarvo).

Tarkoitukseni ei ole ottaa kantaa sen enempää absoluuttisen kuin relatiivisenkaan nimeämiskäytännön puolesta. Molemmilla on etunsa. Tämän esityksen tarpeisiin absoluuttinen käytäntö soveltuu paremmin, joten olen päätynyt siihen. Ylläolevistä joukon merkintätavoista käytetään aina sitä, jonka tarjoama informaatio kulloiseenkin tehtävänasetteluun parhaiten luontuu.

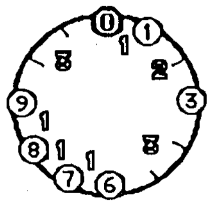
Käänteissymmetrisen joukkoluokan tunnistaa välittömästi siitä, että Forte-nimen perässä ei ole A:ta tai B:tä. Käänteissymmetrisestä joukosta muodostuu identtinen joukkoluokka sekä transponoimisen että kääntämisen ja transponoimisen seurauksena, joten tällainen joukkoluokka on itse oma käänteisjoukkoluokkansa. Esim. joukkoluokkien nimet 3-9, 4-6 ja 5-Z17 viittaavat käänteissymmetrisiin joukkoluokkiin.[43]

Forten normaalijärjestyskriteereistä poikkeaminen on aiheuttanut sen, että kaksi joukkoluokkaa on saanut uuden primaarimuodon. Joukkoluokan 7-19 alkuperäisen primaarimuodon (0,1,2,3,6,7,9) intervallikosta -1113123- tulee uusien kriteerien myötä -1231113- ja primaarimuodosta vastaavasti (0,1,3,6,7,8,9). (Esim 35 a).

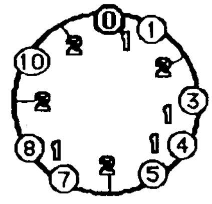
Joukkoluokan 8-26 alkuperäisen primaarimuodon (0,1,2,4,5,7,9,10) intervallikosta -11212212- tulee -12112122- ja primaarimuodosta vastaavasti (0,1,3,4,5,7,8,10). (Esim 35 b).

Paksummalla kirjasimella painettu sävelluokka on normaalijäsen. Tätä merkintätapaa noudatetaan vastedes aina, ellei erikseen toisin mainita.

Esim. 35 a



Esim. 35 b



2.18. JOUKON JÄSENTEN VÄLISESTÄ JÄRJESTYKSESTÄ

Kohdan 2.6.(*Joukko*) alussa todettiin joukon kuvauksen yhteydessä, että joukon jäsenten välistä järjestystä ei ole määrätty. Järjestys voi vaihdella vapaasti joukon identiteetin siitä muuttumatta: {0,1,2,4,7} = {7,1,4,2,0} = {2,4,7,1,0} = {4,2,0,1,7} jne.

Tämä joukko-opin periaate toimii musiikillisiin yhteyksiin siirrettynä säröttömästi tehtävänasetteluissa, joissa riittää joukon jäsenten *luetteleminen*. Asetelma voi olla vaikkapa tyyppiä "mitä sävelluokkia on joukossa, joka muodostuu R-avaruudellisesta säveltasokombinaatiosta Z". On selvää, että vastaus on yhtä pätevä, annettiinpa se muodossa {a,b,c}, {c,b,a} tai {b,a,c} jne.

Jos sensijaan joukkoja tutkitaan näkökulmasta, jonka intervallikot tai yleisemmin mielivaltaisessa järjestyksessä olevien joukkojen peräkkäisten jäsenten välisistä intervalleista muodostuvat intervalliketjut tarjoavat, saatetaan joutua tilanteisiin joihin mainittu "luettelemisen" probleemattomuus ei päde. Kysymys on viime kädessä siitä, kuinka keskeiseksi identiteetin määrittäjäksi joukon rinnakkaisten jäsenten muodostama intervallirakenne hyväksytään.

Joukkoteoreettisissa teksteissä intervallikon kuvaama joukon intervallirakenne saa normaalisti niukasti huomiota osakseen, ja silloinkin usein toissijaisissa katsannoissa. Niinpä koko teorian tarkastelu intervallikon tarjoamista näkökulmista käsin on ollut vähäistä. Sen ottamisesta mukaan aktiiviseksi välineeksi saattaa ymmärrettävästi seurata tiettyä kitkaa vakiintuneiden käsitysten ja määritelmien kanssa. Sävelluokkajoukon jäsenten vapaa järjestys on nähdäkseni tällainen käsitys.

Pyrin valottamaan esimerkin avulla tätä asiaa. Oletetaan joukko {3,1,7,8,6,0}, joka ei ole nousevassa järjestyksessä. Aiemmin määritellyn suunnatun sävelluokkaintervallin käsitteen avulla voidaan helposti määritellä joukon peräkkäisten jäsenten välinen suunnattujen intervallien ketju, aivan kuten tehtiin nousevassa järjestyksessä olevalle joukolle intervallikon selvittämistä varten. Se on 10-6-1-10-6-3. Intervallien summa on 36 eli huomattavasti yli 12:n, jonka todettiin aina olevan intervallikon kriteerit täyttävän intervalliketjun jäsenten summa. Aiemmin on niinikään esitetty 12 puolisävelluokka-askeleesta muodostuvan intervalliavaruuden ominaisuudeksi itseensäkiertyvyys. Sen sisällä tapahtuvat toimenpiteet pidetään mod 12 -aritmetiikan avulla aina numeroiden 0-11 välillä.

Nämä seikat yhdessä johtavat esimerkkijoukon intervalliketjuineen mielenkiintoiseen asetelmaan. Yhtäältä voidaan ajatella, että intervalliketju taivutetaan sykliseen I-avaruuteen (sävelluokkaympyrän kehälle). Ketjua riittää kiertämään ympyrä useaan kertaan, ja sitä mukaan kuin ketjun jäsenintervallit "sulautuvat" I-avaruuteen, niiden päätepisteinä olevat sävelluokat lomittautuvat ympyrän kehälle nousevaan järjestykseen. Sävelluokkaympyrä siis ikäänkuin uudelleenjärjestää sävelluokat tai tuo esiin niiden *todellisen* järjestyksen. Jos toisaalta intervalliketjun 10-6-1-10-6-3 katsotaan asettavan sävelluokat järjestykseen jossa 1 on korkeammalla kuin 3, 7 on korkeammalla kuin 1, 8 on korkeammalla kuin 7 jne., ei ketju mahdu I-avaruuteen ja se on näinmuodoin tulkittava R-avaruudelliseksi olioksi. Vastaava intervalliketjun jäsenten summautuminen yli 12:ksi tai vaihtoehtoisesti sen I-avaruuteen kiertymisestä seuraava sävelluokkien uudelleenryhmittyminen nousevaan järjestykseen tapahtuu *jokaisen* muussa kuin nousevassa järjestyksessä olevan joukon kohdalla.

Kysymyksessä on eräänlainen noidankehä: erään määritelmän mukaan joukon jäsenten järjestys on vapaa, ja toisen määritelmän mukaan niiden väliset etäisyydet voidaan ilmaista peräkkäisten intervallien ketjuna. Kolmannen määritelmän mukaan yli 11:n menevät luvut - tässä tapauksessa intervallien summautumisesta syntyvät - palautetaan 0:n ja 11:n väliin. Tämä puolestaan aiheuttaa sen, että sävelluokat tosiasiallisesti ryhmittyvät ympyrän kehällä aina tietynlaiseen järjestykseen, riippumatta siitä missä järjestyksessä ne nähdään hyväksi luetella.

Nähdäkseni sävelluokkajoukon jäsenten vapaassa järjestyksessä on kysymys vain näennäisestä vapaasta luettelemisesta, sillä todellisuudessa I-avaruuden rakenne sanelee joukoille systeeminsisäisesti "korkeammanasteisen" järjestyksen, joka on kaikissa olosuhteissa nousevan järjestyksen mukainen.

Tämä saattaa vaikuttaa saivartelulta, mutta itse asiassa kyseessä on perusasetelman uudelleenmäärittely, sillä intervalliavaruudellisten joukkojen teoria olisi tällöin yksinomaan tietynlaisten *järjestettyjen joukkojen* (ordered sets) teoriaa: joukot perivät I-avaruudelta ominaisuuden olla nousevassa järjestyksessä. (Epämuodollisesti sanottuna järjestetty joukko täyttää vaatimukset "vain nämä sävelluokat, vain tässä järjestyksessä").

Tuntemissani teksteissä ei I-avaruuden syklisyydestä ja joukkojen intervallirakenteesta aiheutuvia järjestysseuraamuksia käsitellä lainkaan. Sitävastoin on tapana valita nousevassa järjestyksessä oleva joukko kaikkien järjestysvarianttien edustajaksi. Muodollisesti vapaata järjestystä edustaa *eräs* järjestys, mutta tosiasiallisesti operaatioissa hyödynnetään nousevajärjestyksisten joukkojen uniikkia ominaisuutta omata ilman tulkinnanvaraisuuksia suoraan I-avaruuteen sopiva intervallirakenne. Kehoitus joukon saattamisesta nousevaan järjestykseen aiheuttaa keskittymisen erääseen järjestettyjen joukkojen joukkoon, mutta jostain syystä tätä ei tulla sanoneeksi ääneen, vaikka sillä on merkitystä esim. ns. rotaatiosymmetristen joukkojen transponoinnin kannalta.

Esimerkiksi ilmaisultaan erittäin tarkan Daniel Starrin edellämainitussa artikkelissa tämä kysymys sivuutetaan kommenteitta.[44] Hän sijoittaa joukkoja binäärimuotoon, jolloin jokainen joukko esitetään 12-jäsenisenä nollien ja ykkösten kombinaationa. Sävelluokkaympyrän tavoin tämä esitystapa sanelee joukoille automaattisesti nousevan järjestyksen. Kirjoittaja toteaa: "Binary notation thus has an immediate advantage over brace-notation in that it provides a unique way to notate a set, since it allows no equivalent permutations of the same symbols". Notaation aiheuttamaa ankkuroitumista tiettyihin järjestettyihin joukkoihin luonnehditaan "välittömäksi eduksi".

John Rahn puolestaan käyttää symmetrioiden yhteydessä *kanoninen järjestys* (canonical ordering) -nimistä järjestyskriteeriä, joka ei välttämättä ole nousevan järjestyksen mukainen. Tällöin intervalliketjun jäsenten summa saattaa mennä yli 12:n. Intervallikkojen ja ei-nousevajärjestyksisten joukkojen peräkkäisten jäsenten muodostamien intervalliketjujen eroavaisuuksia tai jälkimmäisten suhdetta I-avaruuden syklisyyteen ei käsitellä.[45]

Edelläesitetyistä syistä johtuva tietoinen rajoittuminen käyttämään kaikkien järjestettyjen joukkojen osajoukon muodostavaa nousevajärjestyksisten joukkojen joukkoa ja lopulta vielä sen erästä osajoukkoa, normaalijärjestyksisten joukkojen joukkoa, saattaisi selkiyttää monia kysymyksenasetteluita. I-avaruudelliset operaatiot kyetään suorittamaan normaalijärjestyksisten joukkojen avulla, ja järjestyskysymyksistä aiheutuvat päänvaivat jäisivät pois. *Kaikkien* järjestettyjen sävelluokkajoukkojen joukkoa voitaisiin puolestaan luontevasti käyttää omana kokonaisuutenaan soveltuvien kohteiden, vaikkapa R-avaruudellisten ilmiöiden tutkimiseen, rakentaen sen havaintoja suppeamman I-avaruudellisen kokonaisuuden päälle.[46]

Tarkoitukseni on tämän esityksen osalta vain tyytyä viittaamaan havaitsemiini vapaan järjestyksen ongelmiin ja jättää uusien lähtökohtien määritteleminen tai määrittelemättä jättäminen tuonnemmaksi. Laajempi käsittely on aihe erilliseen esitykseen.

1. 3. ERÄITÄ RINNAKKAISKÄSITTEITÄ

Seuraavassa on tarkoitus esitellä käsitteitä jotka muistuttavat suuresti eräitä edellä jo tarkasteltuja, mutta tuottavat poikkeavien määritelmiensä vuoksi tietyissä tilanteissa hieman erilaisia tuloksia. Päämääränä on tarjota joillekin perinteisille joukkoteoreettisille käsitteille rinnakkaiskäsitteistö. Sitä käytetään eräänlaisena apuna tai tukipisteenä tutkittaessa ilmiöitä, jotka eivät ole välttämättä monimutkaisia mutta osoittautuvat usein hankalasti kuvailtaviksi. Lähinnä nämä ilmiöt liittyvät *kiertosymmetrisiin* joukkoihin, joita tarkastellaan lähemmin *Intervalliavaruudelliset symmetriat* -luvussa.

1.3.1. INTERVALLIAVARUUDELLISET RAKENTEET

Intervalliavaruudellinen rakenne tai lyhyemmin pelkkä *rakenne* on abstraktinen olio, joka määrittää sävelluokkaympyrän kehän tavan jakautua tietynlaiseksi peräkkäisten intervallien yhdistelmäksi (tai yhtä hyvin: 12:n puolisävelluokka-askeleen tavan yhdistyä tietynlaiseksi peräkkäisten intervallien yhdistelmäksi).

Rakenteiden voidaan ajatella koostuvan *jäsenistä*, mutta jäsenillä ei ole sen enempää sävelluokka- kuin nuottinimiäkään. Ainoastaan jäsentenväliset etäisyydet ovat lukkoonlyötyjä. Rakenteen voisi tietysti mieltää *joukon abstraktiona*, mutta koska joukon käsitteeseen liittyy jäsentenväliseen järjestykseen, sävelluokkasisältöön, transponoituvuuteen yms. liittyviä ehtoja, on parempi pitää rakenne kokonaan joukosta irrallisena käsitteenä.

Kunkin rakenteen määrittämä peräkkäisten intervallien yhdistelmä on identtinen jonkin intervallikon kanssa. Tämän vuoksi intervallikolle voidaan antaa lisämääritelmä: se kuvaa yhtä hyvin rakenteen kuin yksittäisen (tietyt järjestyskriteerit täyttävän) joukonkin jäsentenvälisiä etäisyyksiä.

Intervallikon jäsenten summa on aina 12. Tästä seuraa,että mikä tahansa kahdeksitoista summautuva positiivisten kokonaislukujen jono voidaan mieltää intervallikoksi ja saattaa normaalijärjestykseen. Kaikkien intervallikoiden joukko voidaan vastaavasti ajatella kaikkien tällaisten normaalijärjestyksisten jonojen joukkona. Intervallikoiden ja niiden kautta rakenteiden mieltämisessä on siis kysymys yksinkertaisesta yhteenlaskusta. 1+1+10=12, joten luvuista 1,1 ja 10 muodostuva jono on erään 3-jäsenisen rakenteen intervallikko -1,1,10-. 1+3+2+1+2+3=12, joten lukujen 1,3,2,1,2 ja 3 muodostama jono on kuusijäsenisen rakenteen intervallikko -132123-. 1+3+4+4=12, joten erään olemassaolevan nelijäsenisen rakenteen intervallikko on -1344- jne. Kaikkiaan intervalliavaruudellisia rakenteita on yhtä monta kuin transpositionaalisia joukkoluokkia eli 352. Näistä ainoastaan yhdellä, *tyhjällä rakenteella,* ei ole omaa intervallikkoa.

1.3.2. INSTANSSI, INSTANSSILUOKKA

Tiettyä rakennetta voidaan kuvata sävelluokkaympyrällä valitsemalla jokin sävelluokkakombinaatio, jonka jäsentenväliset etäisyydet vastaavat rakenteen jäsentenvälisiä etäisyyksiä. Operaatio voidaan määritellä tapahtuvaksi siten, että rakenteen intervallikko sijoitetaan alkavaksi joltakin sävelluokalta, jolloin sen jäsenintervallit määrittävät vuoronperään kombinaatioon mukaantulevat sävelluokat. Tällaista rakennelähtöisesti muodostettua sävelluokkakombinaatiota nimitetään seuraavassa *instanssiksi.* Epämuodollisesti ajateltuna instanssi on rakenteen transpositio. Mitään tiettyä sävelluokin ilmaistavaa lähtökohtaa, josta käsin transponoimiset suoritetaan, ei siis vain ole olemassa.

Jos esimerkiksi kuusijäsenisen rakenteen intervallikko -132123- päätetään sijoittaa alkavaksi sävelluokalta 3, valikoituvat muodostuvaan instanssiin sävelluokat 3, 3+1=4, 4+3=7, 7+2=9, 9+1=10 ja 10+2= 12=0. Nollaan lisätty viimeinen intervalli 3 sulkee ympyrän takaisin sävelluokkaan 3. Instanssin sävelluokkasisältö sovitaan kirjoitettavaksi < > -sulkujen väliin: <3,4,7,9,10,0>. Instanssin jäsenten välinen järjestys on *määrätty,* ja sen ensimmäistä jäsentä voidaan joukon ensimmäisen jäsenen tavoin nimittää normaalijäseneksi.

Instanssiluokka määritellään syntyväksi siten, että rakenteen intervallikko sijoitetaan alkavaksi jokaiselta sävelluokalta. Kaikki instanssiluokat ovat 12-jäsenisiä. Instanssiluokan primaarimuoto on instanssi, jonka normaalijäsen on nolla. Muut instanssit nimetään normaalijäsenen numeroarvon mukaan. Jos normaalijäsen on 5, on kyseessä luokan 5. instanssi jne.

1.3.3. INSTANSSIMATRIISIT

Koska kaikilla instanssiluokilla on rakenteidensa poikkeavista ominaisuuksista huolimatta se yhteinen piirre että ne sisältävät 12 instanssia, voidaan kaikkien instanssiluokkien tarkastelemiseksi esittää yhdenmukainen visuaalinen havaintoväline. Olen antanut sille nimen *instanssimatriisi.*

Instanssimatriisi on 144-yksikköinen neliönmuotoinen ruudukko, jonka pysty- ja vaakarivit on merkitty numeroilla 0-11 siten että pystyrivien numerot kasvavat vasemmalta oikealle ja vaakarivien ylhäältä alas. (Esim 36 a, seur. sivu).

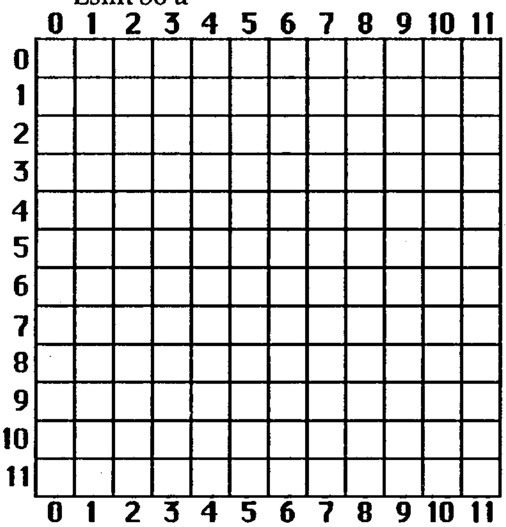
Antamalla vaaka- ja pystyrivien koordinaatit voidaan osoittaa yksittäistä ruutua. Ensimmäinen koordinaatti viittaa aina vaakarivin numeroon, toinen pystyrivin. Esimerkiksi ruutu 1/4 sijaitsee vaakarivin 1 ja pystyrivin 4 leikkauskohdassa. (Esim. 36 b, seur. sivu).

Kukin vaakariveistä viittaa yhteen instanssiin ja kukin pystyriveistä viittaa yhteen sävelluokkaan. Kullekin vaakariville tulee instanssi, jonka normaalijäsenen numeroarvo vastaa rivin numeroarvoa. Jokaisen instanssin jokaisella jäsenellä on oma ruutunsa, joka sijaitsee instanssin normaalijäsenen numeroon viittaavan vaakarivin ja jäsenen sävelluokkaan viittaavan pystyrivin leikkauskohdassa. Leikkauskohdan symboli on musta neliö.

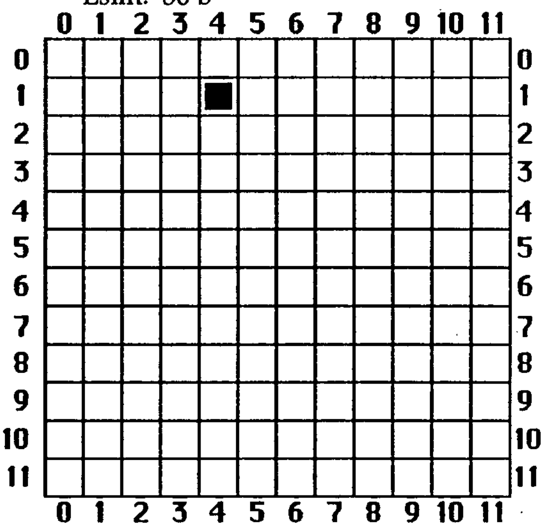
Tietyn instanssin sävelluokkasisältö selviää tutkimalla sen numeroa vastaavalla vaakarivillä sijaitsevien mustien neliöiden pystyrivinumerot. Tietyn sävelluokan kuuluminen luokan eri instansseihin selviää tutkimalla sävelluokan numeroa vastaavalla pystyrivillä sijaitsevien mustien ruutujen vaakarivinumerot.

Primaarimuoto tulee siis aina vaakariville nolla, 1. instanssi vaakariville 1, 2. instanssi vaakariville 2 jne. Primaarimuodon normaalijäsen tulee aina ruutuun 0/0, 1. instanssin normaalijäsen tulee aina ruutuun 1/1, 2. instanssin normaalijäsen tulee aina ruutuun 2/2 jne. Ei-tyhjien rakenteiden ominaisuuksista riippumatta on kaikilla niistä johdettujen instanssiluokkien matriiseilla yhteisenä ominaisuutenaan normaalijäsenten määrittämien mustien neliöiden muodostama diagonaali, joka kulkee aina ruudukon vasemman yläkulman ruudusta 0/0 oikean alakulman ruutuun 11/11. (Esim. 37, seur. sivu). Jokaisen instanssimatriisin jokaisen jäsenjoukon normaalijäsen löytyy aina tältä diagonaalilta, ruudusta joka on samannumeroisen vaaka- ja pystyrivin leikkauskohdassa.

Esim 36 a



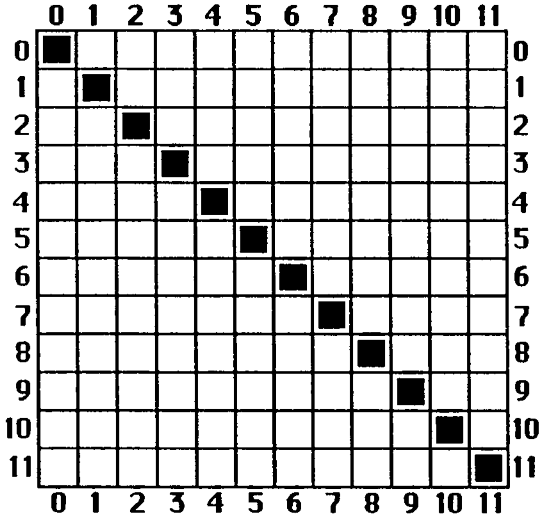
Esim. 36 b



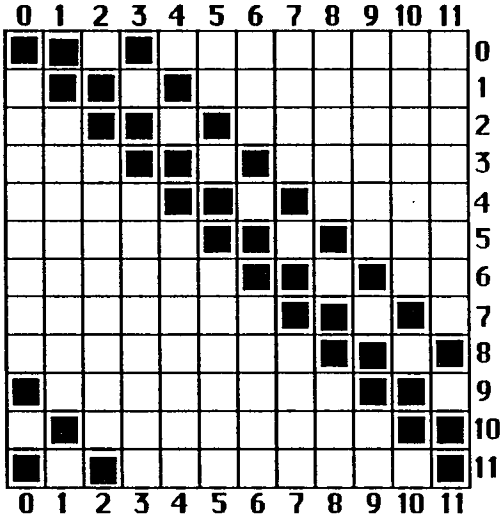
Esimerkissä 38 (seur. sivu) on kolmijäsenisen rakenteen, intervallikoltaan -129-, määrittämä instanssimatriisi. Primaarimuoto on <0,1,3>, 1. instanssi <1,2,4>, 2. instanssi <2,3,5> jne. Primaarimuodon jokaisesta jäsenestä lähtee mustien ruutujen muodostama diagonaali oikealle alas. Ruudusta 0/0 lähtevä normaalijäsenten määrittämä diagonaali on ainoa joka mahtuu koko 12 yksikön pituudeltaan yhtenäisenä ruudukolle. Ruudusta 0/1 lähtevä diagonaali katkeaa ruudussa 10/11 ja jatkuu ruudussa 11/0. Ruudusta 0/3 lähtevä diagonaali katkeaa ruudussa 8/11 ja jatkuu ruudussa 9/0.

Kukin diagonaali viittaa rakenteen tiettyyn yksittäiseen jäseneen, joka transponoituessaan ilmenee kussakin jäsenjoukossa eri sävelluokkana. Matriisista voi myös esimerkiksi nähdä, että sävelluokka 0 on jäsenenä instansseissa 0, 9 ja 11. Sävelluokka 1 on jäsenenä instansseissa 0, 1 ja 10 jne.

Esim. 37



Esim. 38



1.3.4. INSTANSSILUOKAN JA JOUKKOLUOKAN ERO

Epäsymmetriset joukkoluokat ja *1-akselisesti symmetrisistä* joukoista (jotka muodostavat käänteissymmetristen joukkojen suurimman osajoukon) johdettavat joukkoluokat koostuvat kahdestatoista sävelluokkasisällöltään erilaisesta jäsenjoukosta. Myöskin epäsymmetrisistä ja 1-akselisesti symmetrisistä rakenteista muodostettavat instanssiluokat koostuvat kahdestatoista sävelluokkasisällöltään erilaisesta instanssista. Näissä tapauksissa ovat siis intervallikon E omaava joukkoluokka ja saman intervallikon E omaava instanssiluokka identtisiä. Samaten jos instanssiluokka sijoitetaan instanssimatriisille ja joukkoluokka vastaavalle *joukkoluokkamatriisille,* on tulos identtinen.

Kun *kiertosymmetristä* joukkoa transponoidaan kaikilla transpositiointervalleilla joukkoluokan muodostamiseksi, havaitaan että osa syntyvistä joukoista on tämäntyyppisiin symmetrioihin kuuluvien itseensäkiertyvyysominaisuuksien vuoksi tiettyjen lainalaisuuksien mukaisesti sävelluokkasisällöiltään identtisiä. Jäsentenväliseltä järjestykseltään erilaiset mutta sävelluokkasisällöltään identtiset joukot tulkitaan yhdeksi ja samaksi joukoksi, joten kiertosymmetrisestä joukosta muodostetussa joukkoluokassa on aina vähemmän kuin 12 jäsenjoukkoa.

Kun taas *kiertosymmetrisen rakenteen* intervallikkoa sijoitetaan alkavaksi kaikilta sävelluokilta instanssiluokan muodostamiseksi, on osa syntyvistä instansseista niinikään sävelluokkasisällöltään identtisiä. Kuitenkin instanssiluokka on edelleen 12-jäseninen, sillä jäsentenvälisen järjestyksen ollessa määrätty tulkitaan samansisältöiset mutta erijärjestyksiset instanssit eri olioiksi: <0,3,6,9> ≠ <3, 6,9,0> ≠ <6,9,0,3> jne.

Esimerkissä 39 on *4-akselisesti* kiertosymmetrisestä joukosta {0,3,6,9} (vähennetty septimisointu), intervallikoltaan -3333-, muodostettu joukkoluokka joukkoluokkamatriisilla. Sävelluokkasisällöltään erilaisia jäsenjoukkoja on vain kolme.

Esimerkissä 40 on neliakselisesti kiertosymmetrisen rakenteen, intervallikoltaan -3333-, määrittämä instanssiluokka matriisilla. Instansseja on 12, joista kolmen puolisävelluokka-askeleen päässä toisistaan olevat ovat sisällöiltään identtisiä.

Esim. 39

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
■			■			■			■		
	■			■			■			■	
		■			■			■			■

Esim. 40

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	■			■			■			■			0
1		■			■			■			■		1
2			■			■			■			■	2
3	■			■			■			■			3
4		■			■			■			■		4
5			■			■			■			■	5
6	■			■			■			■			6
7		■			■			■			■		7
8			■			■			■			■	8
9	■			■			■			■			9
10		■			■			■			■		10
11			■			■			■			■	11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Vastaaviin tapauksiin palataan tarkemmin symmetrioiden yhteydessä. Kiertosymmetristen joukkojen ja rakenteiden tuottaessa jäsenjoukkojen ja -instanssien määrän puolesta toisistaan poikkeavia joukko- ja instanssiluokkia käy myöskin ilmeiseksi, että *kaikkien joukkojen joukko* on erisuuruinen kuin *kaikkien instanssien joukko.*

Sävelluokkasisällöltään erilaisten joukkojen joukko koostuu (2^{12})-1=4095 jäsenestä, tai jos tyhjä joukko lasketaan mukaan, on jäseniä 2^{12}=4096. Instanssien joukossa on jäseniä kaikkien rakenteiden määrä kertaa kaikkien sävelluokkien määrä, 351*12= 4212, tai mikäli tyhjä rakenne lasketaan mukaan, (351*12)+1=4213. Tyhjällä rakenteella ei ole intervallikkoa jota sijoittaa alkavaksi vuoroin kaikilta sävelluokilta, joten sillä ei myöskään ole "rakenteen transpositioita". Tyhjää rakennetta tulkitaan olevan vain yksi kappale.

Kiertosymmetristen joukkojen muodostamien joukkoluokkien poikkeaminen 12-jäsenjoukkoisuudesta on ilmiö, joka huolellisuutta noudatettaessa ei aiheta ongelmia.

Kiertosymmetrisyydestä koituvat erikoistapaukset ovat käsillä esim. operoitaessa havaintovälineillä, joille olen antanut yhteisnimen *leikkausvektorit*. Ne kuvaavat yhteisten jäsenten määriä joukon ja sen transpositioiden kanssa, joukon ja sen käänteisjoukon transpositioiden kanssa tai yleensä joukon ja mihin tahansa joukkoluokkaan kuuluvan joukon ja sen transpositioiden kanssa. Operaatio voidaan kuvata tapahtuvaksi siten, että toista joukkoa pidetään vertailukohtana paikoillaan ja toista transponoidaan kaikilla transpositiointervalleilla "sitä vastaan", tutkien kulloinkin syntyvän transposition ja vertailujoukon leikkaus.

Epäsymmetristen ja yksiakselisesti symmetristen joukkoluokkien tapauksissa tulee jokainen 12:sta erilaisesta sävelluokkasisällöstä tutkittua vertailujoukon kanssa yhden kerran. Kiertosymmetrisistä joukoista johdettujen joukkoluokkien tapauksissa ovat useat transpositiot sävelluokkasisällöiltään identtisiä, joten kunkin sävelluokkasisällön leikkaus tulee transponoimisen myötä tutkittua vertailujoukon kanssa (jaksollisuudesta riippuen) kaksi, kolme, neljä, kuusi tai teoriassa jopa kaksitoista kertaa. Tietty joukkoluokka saatetaan sävelluokkasisältökriteerein määritellä esim. 6-jäsenjoukkoiseksi, mutta operaatioissa sitä käsitelläänkin "kaksinkertaistettuna", transponoinnin avulla johdetussa muodossa, joka *vastaa tarkalleen instanssiluokkaa*.

Tällaisissa tapauksissa tulee luonnollisesti joko selvittää kiertosymmetrioiden aiheuttamat erikoistilanteet, tai suorittaa niiden tuottamille tuloksille jatko-operaatioita. Näin useimmiten[47] menetelläänkin, muttei aina. Esim. John Rahn ei ns. TICS-vektoria esitellessään viittaa kiertosymmetrioiden tuottamiin poikkeuksiin, vaikka onkin aiemmin osoittanut näiden symmetrioiden - hän käyttää termiä transpositional symmetry - itseensäkiertyvyysominaisuudet.[48]

Leikkausvektorit -luvun operaatioissa olen pitäytynyt käytännössä, jossa transponoitavaa joukkoa transponoidaan kaikilla kahdellatoista transpositiointervallilla, sen mahdollisesta kiertosymmetrisyydestä riippumatta. Tästä ei aiheudu epäselvyyksiä, sillä kiertosymmetristen joukkojen joukkoluokanmuodostus selvitetään tapaus tapaukselta *Intervalliavaruudelliset symmetriat* -luvussa, ja lisäksi *Leikkausvektorit* -luvussa tarkastellaan kiertosymmetrioiden käyttäytymistä erityyppisissä leikkausvektoriasetelmissa.

1.3.5. KIERTOSYMMETRISEN JOUKON JA INSTANSSIN NORMAALIJÄRJESTYS

Kiertosymmetrisellä joukolla on useita syklisiä permutaatioita, jotka toteuttavat normaalijärjestyksen kriteerit yhtä hyvin. Esimerkissä 39 käytetyn joukon sykliset permutaatiot {0,3,6,9}, {3,6,9,0}, {6,9,0,3} ja {9,0,3,6} ovat kaikki samanarvoisia ehdokkaita normaalijärjestykseksi. Tällöin on tapana valita normaalijärjestykseksi syklinen permutaatio, jonka normaalijäsenen numeroarvo on pienin, tässä tapauksessa {0,3,6,9}.[49] Instanssien kohdalla tällaista tilannetta ei voi muodostua, koska niiden syntytapa sanelee aina normaalijäsenen.

1.4. JOUKKOJENVÄLISISTÄ KÄÄNTEISSUHTEISTA

1.4.1. KÄÄNTEISSUHDEASETELMAT

Kahden käänteisjoukon välisen käänteissuhteen tutkiminen on periaatteessa vastauksen etsimistä jompaankumpaan seuraavista kysymyksistä:

1) kun tietty joukko käännetään tietyn akselin suhteen, mikä käänteisjoukkoluokan jäsenjoukoista saadaan tulokseksi. (Ennen operaation suorittamista on selvillä joukko, intervallikko ja akseli).

2) tietyt kaksi joukkoa kuuluvat käänteisjoukkoluokkiin. Minkä akselin suhteen kääntämällä joukkojen sävelluokkasisällöt ovat saatettavissa toisikseen. (Ennen operaation suorittamista on selvillä kaksi joukkoa intervallikkoineen, muttei akselia)

1)

Kohdan 1) suorittamiseksi tarvitaan kolme tietoa: käännettävän joukon *normaalijäsenen* numeroarvo, joukon intervallikon *vakio-osan* numeroarvo ja ***akselin jommankumman kiintopisteen numeroarvo kerrottuna kahdella*** (kuten sanottu, on samantekevää kumman kiintopisteen valitsee, sillä molemmat tuottavat saman tuloksen: 0*2 = 0 ja 6*2 = 0, 1*2 = 2 ja 7*2 = 2, 5 1/2 *2 = 11 ja 11 1/2 *2 = 11 jne).
Vakio-osan numeroarvo lasketaan yhteen kahdella kerrotun kiintopisteen numeroarvon kanssa. Summasta vähennetään normaalijäsenen numeroarvo. Erotus osoittaa käännöksen tuloksena syntyvän käänteisjoukkoluokan jäsenjoukon järjestysnumeron (normaalijäsenen numeroarvon). Muodollisemmin ilmaistuna

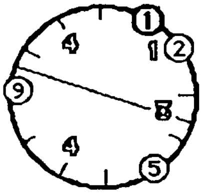
$$I^K(N) = (V+2K)-N$$

K on kiintopisteen numeroarvo, N normaalijäsenen numeroarvo ja V vakio-osan numeroarvo.

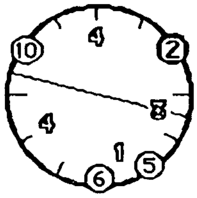
Esimerkki 41: joukko -1344-/1 eli 4-19 A/1, sävelluokkasisällöltään {1,2,5,9}, käännetään akselin 3 1/2 - 9 1/2 suhteen. Valinnaisen kiintopisteen numeroarvo kerrottuna kahdella on 7 (2*3 1/2 = 7 ja 2* 9 1/2 = 19 = 7), intervallikon vakio-osa on 4+4=8 ja joukon normaalijäsenen numeroarvo on yksi. 7+8-1 = 14 = 2. Kääntämisen tuloksena syntyy käänteisjoukkoluokan jäsenjoukko numero kaksi, -3144-/2 eli 4-19 B/2. Sävelluokkasisältö {2,5,6,10} saadaan sijoittamalla intervallikko -3144- alkamaan sävelluokalta 2. $I^{3\,1/2}$ {1,2,5,9} = {2,5,6, 10}. (Esim.41 a-b, seur. sivu).

Esimerkki 42: joukko -211323-/7 eli 6-Z47 B/7, sävelluokkasisällöltään {7,9,10,11,2,4} käännetään akselin 1 1/2 - 7 1/2 suhteen. Kiintopisteen numeroarvo kerrottuna kahdella on 3 (2*1 1/2 = 3 ja 2* 7 1/2 = 15 = 3), intervallikon vakio-osan numeroarvo on 3+2+3=8 ja joukon normaalijäsenen numeroarvo on seitsemän. 3+8-7=4. Kääntämisen tuloksena syntyy käänteisjoukkoluokan jäsenjoukko numero neljä, -112323-/4 eli 6-Z47 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,6,8,11,1}. $I^{1\ 1/2}$ {7,9,10,11,2,4} = {4,5,6,8,11,1}.

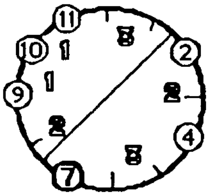
Esim. 41 a



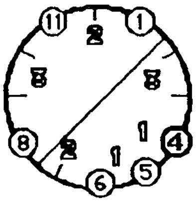
Esim. 41 b



Esim. 42 a

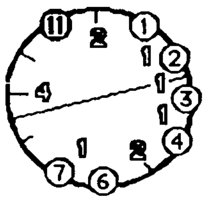


Esim. 42 b

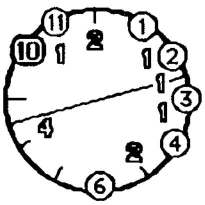


Esimerkki 43: joukko -2111214-/11 eli 7-11 B/11, sävelluokkasisällöltään {11,1,2,3,4,6,7} käännetään akselin 2 1/2 - 8 1/2 suhteen. Kiintopisteen numeroarvo kerrottuna kahdella on 5 (2*2 1/2 = 5 ja 2* 8 1/2 = 17 = 5), intervallikon vakio-osan numeroarvo on 4 ja joukon normaalijäsenen numeroarvo on yksitoista. 5+4-11=-2=10. Kääntämisen tuloksena syntyy käänteisjoukkoluokan jäsenjoukko numero kymmenen, -1211124-/10 eli 7-11 A/10, sävelluokkasisällöltään {10,11,1,2,3,4, 6}. $I^{2\ 1/2}$ {11,1,2,3,4,6,7} = {10,11,1,2,3,4,6}.

Esim. 43 a



Esim. 43 b



2)

Kahden tunnetun käänteisjoukon välistä akselia - akselia jonka suhteen käännettäessä joukkojen sävelluokkkasisällöt ovat saatettavissa toisikseen - etsittäessä tarvitaan tieto joukkojen normaalijäsenten numeroarvoista ja intervallikkojen yhteisen vakio-osan numeroarvosta.

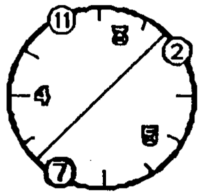
Normaalijäsenten numeroarvot lasketaan yhteen. Summasta vähennetään vakio-osan numeroarvo. Erotus jaetaan kahdella. Tulos kertoo suoraan akselin toisen kiintopisteen numeroarvon. Eli:

$$\frac{(N_1 + N_2) - V}{2} = K$$

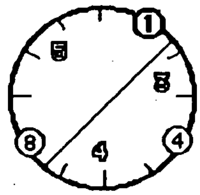
N_1 ja N_2 ovat käänteisjoukkojen normaalijäsenten numeroarvot. V on vakio-osan numeroarvo. K on akselin kiintopiste.

Esimerkki 44: joukot -435-/7 ja -345-/1 eli 3-11 B/7 ja 3-11 A/1, sävelluokkasisällöiltään {7,11,2} ja {1,4,8} ovat käänteisjoukkoja. Normaalijäsenten numeroarvot ovat 7 ja 1. Vakio-osien numeroarvo on viisi . (7+1) - 5 = 3. Kolme jaettuna kahdella tuottaa kiintopisteen numeroarvon puolitoista. Käännettäessä joukot -435-/7 ja -345-/1 akselin 1 1/2 - 7 1/2 suhteen niiden sävelluokkasisällöt kääntyvät toisikseen. $I^{1\,1/2}\{7,11,2\} = \{1,4,8\}$.

Esim. 44 a

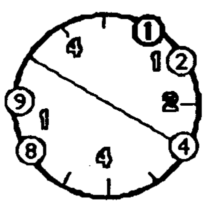


Esim. 44 b

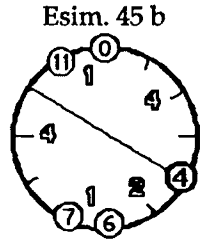


Esimerkki 45: joukot -12414-/1 ja -21414-/4 eli 5-20 A/1 ja 5-20 B/4, sävelluokkasisällöiltään {1,2,4,8,9} ja {4,6,7,11,0}, ovat käänteisjoukkoja. Normaalijäsenten numeroarvot ovat 1 ja 4. Vakio-osien numeroarvo on 4+1+4 = 9. (1+4) - 9 = - 4 = 8 ja 8 jaettuna kahdella tuottaa kiintopisteen numeroarvon 4. Käännettäessä joukot -12414-/1 ja -21414-/4 akselin 4 - 10 suhteen niiden sävelluokkasisällöt kääntyvät toisikseen. $I^4\{1,2,4,8,9\} = \{4,6,7,11,0\}$.

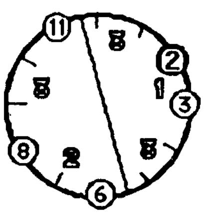
Esim. 45 a



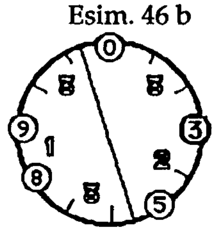
Esim. 45 b



Esim. 46 a



Esim. 46 b



Esimerkki 46: joukot -13233-/2 ja -23133-/3 eli 5-32 A/2 ja 5-32 B/3, sävelluokkasisällöiltään {2,3,6,8,11} ja {3,5,8,9,0} ovat käänteisjoukkoja. Normaali-

jäsenten numeroarvot ovat 2 ja 3. Vakio-osien numeroarvo on 3+3 = 6. (2+3) - 6 = -1 = 11. 11 jaettuna kahdella on 5 1/2. Käännettäessä joukot -13233-/2 ja -23133-/3 akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen niiden sävelluokkasisällöt kääntyvät toisikseen. $I^{5\,1/2}$ {2,3,6,8,11} = {3,5,8,9,0}. (Esim. 46 a-b, edell. sivu).

1.4.2. VASTINJOUKKOJEN KÄÄNTEISAKSELIN ETSIMINEN

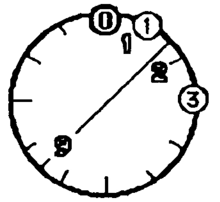
Käänteisjoukkoluokkien samannumeroisten jäsenjoukkojen - jota tässä esityksessä nimitetään *vastinjoukoiksi* - välinen akseli selviää vähentämällä (joukoille yhteisen) normaalijäsenen numeroarvosta vakio-osan numeroarvo jaettuna kahdella. Toisin ilmaistuna:

$$K = N - (V/2)$$

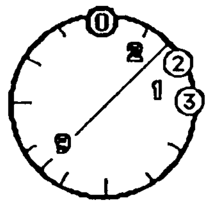
K on kiintopisteen numeroarvo, N normaalijäsenen numeroarvo ja V vakio-osan numeroarvo.

Esimerkki 47: joukot {0,1,3} ja {0,2,3} ovat käänteisjoukkoluokkien 3-2 A ja 3-2 B primaarimuodot. Normaalijäsenten numeroarvosta nolla vähennetään intervallikoiden -129- ja -219- vakio-osien numeroarvo 9 jaettuna kahdella eli 4 1/2 . 0 - 4 1/2 = -4 1/2 = 7 1/2 . Primaarimuodot voidaan saattaa toisikseen kääntämällä ne akselin 1 1/2 - 7 1/2 suhteen. $I^{1\,1/2}$ {0,1,3} = {0,2,3}.

Esim. 47 a

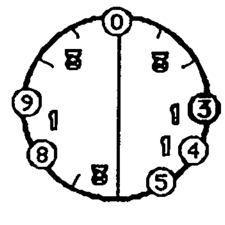


Esim. 47 b

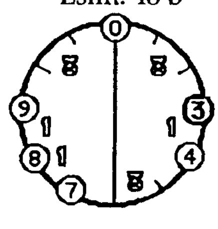


Esimerkki 48: joukot {3,4,5,8,9,0} ja {3,4,7,8,9,0} ovat käänteisjoukkoluokkien 6-Z44 A ja 6-Z44 B 3. jäsenjoukot. Normaalijäsenten numeroarvosta 3 vähennetään intervallikoiden -113133- ja -131133- vakio-osien numeroarvo 6 jaettuna kahdella eli kolme. 3 -3 = 0. Joukot voidaan saattaa sävelluokkasisällöiltään toisikseen kääntämällä ne akselin 0-6 suhteen. I^{0}{3,4,5,8,9,0} = {3,4,7,8,9,0}.

Esim. 48 a



Esim. 48 b



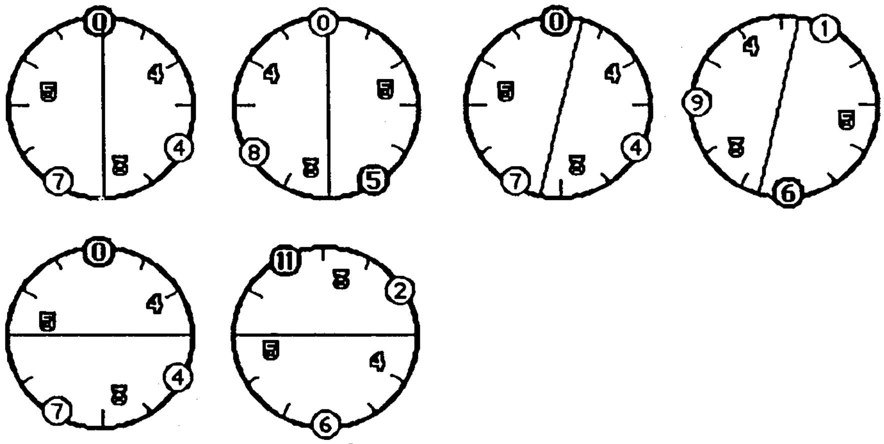
1. 5. I-AVARUUDELLISET AKSELIT R-AVARUUDESSA

Edellä on nähty, että käänteisjoukkoluokkiin kuuluvien jäsenjoukkojen sävelluokkasisällöt ovat aina saatettavissa toisikseen jonkin akselin suhteen kääntämällä, ja että akselissa on aina kaksi kiintopistettä. Jos I-avaruudellinen akseli ja sen suhteen toisikseen kääntyvät käänteisjoukot sijoitetaan R-avaruuteen, säilyy tilanne samankaltaisena, paitsi että joukoista muodostetut säveltasokombinaatiot voidaan sijoittaa käänteiseen asetelmaan *vain toisen kiintopisteen suhteen kerrallaan*. Tämä johtuu siitä, että R-avaruus ei ole I-avaruuden tavoin itseensäkiertyvä. Mahdolliset kiintopistevaihtoehdot ovat R-avaruudessa aina oktaavin, tritonuksen tai niiden oktaavikerrannaisten päässä toisistaan. Yhdessä R-avaruudellisessa oktaavissa on 24 mahdollista paikkaa kiintopisteelle - puolet sävelillä ja puolet sävelten väleissä.

R-avaruudellista yksikiintopisteisyyttä on havainnollistettu esimerkeissä 49 a-f ja 50 a-f. Sävelluokkaympyräesimerkissä (49 a-f) ovat kohtien a ja b joukot käänteisiä akselin 0-6 suhteen. Kohtien c ja d joukot ovat käänteiset akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen. Kohtien e ja f joukot ovat käänteiset akselin 3-9 suhteen. Kaikissa tapauksissa joukot ovat siis käänteisiä akselin kummankin pään suhteen.

Joukot kuuluvat käänteisjoukkoluokkiin 3-11 A ja 3-11 B, intervallikoiltaan -345-/-435-. Kohtien a,c ja e joukon -435-/0 R-avaruudellinen vastine on C-duurikolmisointu. Kohdan b joukon -345-/5 R-avaruudellinen vastine on f-mollikolmisointu. Kohdan d joukon -345-/6 R-avaruudellinen vastine on fis-mollikolmisointu. Kohdan f joukon -345-/11 R-avaruudellinen vastine on h-mollikolmisointu.

Esim. 49 a 49 b 49 c 49 d



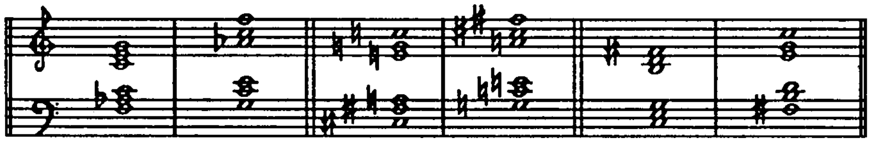
49 e 49 f

Esimerkin 50 a-kohdassa C-duurisointu ja f-mollisointu ovat käänteiset sävelen c^1 suhteen. b-kohdassa ne ovat käänteiset sävelen fis^1 suhteen.

Esimerkin 50 c-kohdassa C-duurisointu ja fis-mollisointu ovat käänteiset sävelten c^1 ja cis^1 väliin sijoittuvan säveltason suhteen. d-kohdassa ne ovat käänteiset sävelten fis^1 ja g^1 väliin sijoittuvan säveltason suhteen.

Esimerkin 50 e-kohdassa C-duurisointu ja h-mollisointu ovat käänteiset sävelen a suhteen. f-kohdassa ne ovat käänteiset sävelen es^1 suhteen. Kaikissa tapauksissa vain toinen akselien I-avaruudellisista kiintopisteistä on "voimassa".

Esim. 50 a b c d e f



Tähän kysymyksenasetteluun palataan lähemmin symmetrioiden yhteydessä.

1.6. JOUKKOLUOKKIEN MUODOSTUS

Eräs joukkoteorian alkuhankaluuksista on se, että perusteita opettelevan ei ole helppo saada otetta lainalaisuuksiin, jotka säätelevät erilaisten joukkoluokkien muodostumista ja lukumääriä. Rakenteet ja intervallikot voivat tässä suhteessa olla avuksi. Vaikka joukkoluokan ja rakenteen määrittelyiden yhteydessä todettiin näillä käsitteillä olevan tietyissä tapauksissa eroja, eivät ne vaikuta tähän nimenomaiseen kysymyksenasetteluun. Yhteinen intervallikko toimii sopivana yhdistävänä tekijänä rakenteen ja joukkoluokan välillä, ja rakenteista tehdyt havainnot pätevät sellaisinaan myös joukkoluokkiin.

Aiemmin on todettu, että kaikkia rakenteita kuvaavien kaikkien intervallikoiden joukko koostuu kaikista erilaisista normaalijärjestyksisistä intervalliketjuista, joiden jäsenintervallien numeroarvojen summa on 12.

Kardinaalisuutta n edustavia rakenteita kuvaavien intervallikoiden joukko on tällöin niiden erilaisten intervalliketjujen joukko, joiden jäsenintervallien numeroarvojen summa on 12 ja joissa on n jäsenintervallia.

Jos esimerkiksi halutaan tutkia, kuinka monta kaksijäsenistä rakennetta on olemassa, tarvitsee vain selvittää kuinka monta erilaista kahdeksitoista summautuvaa (normaalijärjestyksistä) lukuparia on olemassa. 1+11=12, 2+10=12, 3+9=12, 4+8=12, 5+7=12, 6+6=12. Kahdeksitoista summautuvia lukupareja ja näinollen myös kaksijäsenisiä rakenteita on kuusi kappaletta.

Kardinaalisuuden 2 *komplementtikardinaalisuutta* 10 (komplementtikardinaalisuuksien summa on aina kaksitoista, tässä tapauksessa siis 2+10=12) edustavien rakenteiden määrä selviää tutkimalla, kuinka monta erilaista normaalijärjestyksistä kahdeksitoista summautuvaa kymmenjäsenistä intervalliketjua on olemassa.

(Ks. seur. sivu).

1+1+1+1+1+1+1+1+1+3=12, 1+1+1+1+1+1+1+1+2+2=12,
1+1+1+1+1+1+1+2+1+2=12, 1+1+1+1+1+1+2+1+1+2=12,
1+1+1+1+1+2+1+1+1+2=12, 1+1+1+1+2+1+1+1+1+2=12.

10-jäsenisiä rakenteita on 2-jäsenisten tavoin 6 kpl. Komplementtikardinaalisuuksia edustavia rakenteita on aina yhtä monta. n-kardinaalisuuksisen rakenteen jäsenet varaavat aina sävelluokkaympyrän kahdestatoista yksiköstä n kappaletta, jolloin käyttämättä jääneet 12-n kappaletta yksiköitä muodostavat keskenään n-jäsenisen rakenteen *komplementtirakenteen*. Koska jokaisella rakenteella voi olla vain yksi komplementtirakenne, on kaikkien n-kardinaalisuuksisten rakenteiden joukko yhtä suuri kuin 12-n -kardinaalisuuksisten komplementtirakenteiden joukko.

Kolmijäsenisten rakenteiden määrä puolestaan selviää etsimällä normaalijärjestyksiset, kahdeksitoista summautuvat kolmijäseniset intervalliketjut:

-1,1,10-, -129-, -219-, -138-, -318-, -147-, -417-, -156-, -516-, -228-, -237-, -327-
-246-, -426-, -255-, -336-, -345-, -435-, -444-

Kolmijäsenisiä rakenteita on 19 kpl, joista viisi käänteissymmetristä - intervallikon käänteisosa tuottaa käännettäessä itsensä - ja 14 epäsymmetristä - intervallikon käänteisosa ei pysy käännettäessä samana. 14 epäsymmetristä rakennetta muodostavat 7 A/B-tyyppistä rakennetta.

352 rakennetta/joukkoluokkaa jakautuvat kardinaalisuuksiin seuravasti:

kardinaalisuus	lukumäärä	A/B-tyyppisiä	käänt.symm.
# 0	1	0	1
# 1	1	0	1
# 2	6	0	6
# 3	19	14 (7 A/B-rak.)	5
# 4	43	28 (14 A/B-rak.)	15
# 5	66	56 (28 A/B-rak.)	10
# 6	80	60 (30 A/B-rak.)	20
# 7	66	56 (28 A/B-rak.)	10
# 8	43	28 (14 A/B-rak.)	15
# 9	19	14 (7 A/B-rak.)	5
# 10	6	0	6
# 11	1	0	1
# 12	1	0	1

Kaikkien joukkoluokkien intervallikot ja primaarimuodot löytyvät esityksen lopussa olevasta taulukosta.

2. INTERVALLIAVARUUDELLISET SYMMETRIAT

2.1. YLEISTÄ

Intervalliavaruudelliset symmetriat muodostavat joukkoteoreettisen peruskäsitteistön piirissä tarkasti rajatun ja mielenkiintoisen osakokonaisuuden. Tämän esityksen materiaalin keruu- ja testausvaiheen aikana niiden ominaispiirteet nousivat ikäänkuin vaivihkaa esiin omaksi kokonaisuudekseen, joka tuntui vaativan erityistä huomiota osakseen. Lukuisia hyvinkin erityyppisiä operaatioita tutkiessani havaitsin, että osa tuloksista poikkeaa niistä ennusteista, joita alustavat testit näyttäisivät tarjoavan. Syy poikkeamisiin löytyi säännöllisesti materiaalin tietynlaisista symmetriaominaisuuksista. Varsinkin edellisessä luvussa jo sivutut *kiertosymmetriat* osoittautuivat usein tehokkaiksi intervalliavaruudellisten säännönmukaisuuksien rikkojiksi.

Joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa viitataan tavan takaa näkökohtiin, joita symmetrioista eri operaatioille aiheutuu. Perusteellista, kaikki symmetriatyypit ja -tapaukset havainnollisesti erittelevää esitystä, joka soveltuisi vasta-alkajalle, ei kuitenkaan tahdo löytyä. Nähdäkseni tämä johtuu siitä, että lähestulkoon kaikissa esityksissä symmetrioiden havaintovälineiksi valitut yksittäiset joukot eivät sovellu tehtäväänsä erityisen hyvin. Niistä käsin operoitaessa on kaikkien symmetrioiden yhteisten ominaisuuksien tai erilaisten symmetriatyyppien sisäisten ominaisuuksien selvittäminen vaikeaa. Ja kaikkein hankalimmin joukkotason tarkastelun avulla on osoitettavissa asia joka on muusikolle kaikkein hyödyllisin: symmetriat käyttäytyvät lajiominaisuuksiensa rajaamissa puitteissa tiukan yhdenmukaisesti.

Ilmeisesti näistä vaikeuksista johtuen jotkut kirjoittajat melkeinpä sivuuttavat symmetrioiden käsittelyn, vaikka "rivien välissä" hyödyntävätkin niitä täysimääräisesti operaatioiden, taulukoiden jne. yhteyksissä. Näin on toiminut mm. Allen Forte, herättäen päätöksellään keskustelua.[1]

Tämän luvun tarkoituksena on tarkastella, millainen kuva intervalliavaruudellisista symmetrioista on mahdollista muodostaa, kun joukkojen lisäksi havaintovälineinä käytetään intervallikoita, sävelluokkaympyrää sekä jäsenjoukko- ja instanssimatriiseja.

2.1.1. SYMMETRIAN MÄÄRITTELEMINEN

Käänteisjoukkoluokat yhdeksi yksiköksi mieltävää Forten joukkoluokitusta käytettäessä voidaan symmetriseksi joukoksi määritellä jokainen joukko, joka kuuluu vähemmän kuin 24-jäsenjoukkoiseen joukkoluokkaan. Tämä määritelmä on mahdollinen siksi, että jokainen symmetriatyyppi tuottaa tavalla tai toisella alle 24-jäsenjoukkoisen joukkoluokan, ja toisaalta yksikään epäsymmetrinen joukko ei tuota alle 24-jäsenjoukkoista joukkoluokkaa. Jäsenjoukkojen määrä käy ilmi määrittämällä yksittäiselle jäsenjoukolle ns. symmetrian aste (degree of symmetry), ja jakamalla luku 24 sillä.[2] Tämä määritelmä - jota itse asiassa ei ole tarkoitettu varsinaiseksi symmetrian määritelmäksi - osoittaa kaikkien symmetrioiden yhteisen ominaisuuden tuottaa alle 24 -jäsenjoukkoinen joukkoluokka, mutta ei valaise niitä tekijöitä, jotka kulloinkin alle 24-jäsenjoukkoisuuden aiheuttavat.

Jos pitäydytään korkeintaan 12-jäsenjoukkoisissa transpositionaalisissa joukkoluokissa, on symmetrian kriteereitä kaksi. Niistä suuremman tapausjoukon tuottava on käänteisyys:

Jos joukon sävelluokkasisältö pysyy jonkin tai joidenkin intervalliavaruudellisten akselien suhteen käännettäessä muuttumattomana, on kyseessä käänteissymmetrinen joukko. (Käänteissymmetrisyys = engl. inversional symmetry).

Toinen, pienemmän tapausjoukon tuottava kriteeri on itseensäkiertyvyys:

Jos joukko pysyy sävelluokkasisällöltään muuttumattomana transponoitaessa sitä jollakin tai joillakin transpositiointervalleilla t siten että $t \neq 0$, *on kyseessä kiertosymmetrinen joukko.* (Kiertosymmetrisyys = engl. rotational symmetry, transpositional symmetry).

Nollalla transponoimista ei noteerata, sillä se on identiteettioperaatio, joka säilyttää kaikki joukot samoina.

Se että 24-jäsenjoukkoista joukkoluokitusta käytettäessä symmetrisyyden määrittelemiseen tarvittiin yksi kriteeri ja 12-jäsenjoukkoista luokitusta käytettäessä kaksi, ei tee 24-jäsenjoukkoisen luokituksen suhdetta symmetriaan elegantimmaksi. Tämä johtuu siitä, että mahdollinen alle 24-jäsenjoukkoisuus ratkeaa senkin kohdalla nimenomaan käänteisyyden ja itseensäkiertyvyyden avulla. Kriteerit ovat samat, mutta toisessa tapauksessa ne ovat piilossa yleisluontoisemman määritelmän sisällä.

2. 1.2. SYMMETRIATYYPPIEN PÄÄLLEKKÄISYYS

Kumpikaan symmetrioiden päätyyppi, käänteissymmetrisyys tai kiertosymmetrisyys, ei ole yhteinen kaikille symmetrisille joukoille. Toisaalta, osoitettaessa toisen symmetriatyypin omaavaa tapausjoukkoa ei myöskään tulla sulkeneeksi toista pois. Osa käänteissymmetrioista on myös kiertosymmetrioita ja lähes kaikki kiertosymmetriat ovat myös käänteissymmetrioita. *Pelkkien* käänteissymmetrioiden joukko on *kaikkien* käänteissymmetrioiden suuri osajoukko, ja pelkkien kiertosymmetrioiden joukko on kaikkien kiertosymmetrioiden pieni osajoukko.

Sekaannuksia lupailevasta käsitteiden ristiinkutoutumisesta huolimatta symmetriat on helppo jakaa yksiselitteisiin kategorioihin. Tämä tapahtuu luokittelemalla ne *symmetria-akselien lukumäärien* mukaan. Toimenpide on havainnollinen sen hyödyntäessä useimpien symmetrioiden olemukseen mitä elimellisimmin kuuluvaa aspektia. Minusta on merkillistä, että tätä jaottelua ei ole joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa otettu yleiseen käyttöön. Itse asiassa en tunne ensimmäistäkään lähdettä, jossa edes viitattaisiin akselityyppien avulla tapahtuvaan luokitteluun. Akseleista sinänsä puhutaan runsaasti, toisinaan saatetaan jopa viitata moniakselisuuden olemassaoloon, mutta tarkempaan erittelyyn ei ryhdytä.[3]

2. 1.3. AKSELIEN LUKUMÄÄRÄT

Akseleilla varustetut intervalliavaruudelliset symmetriat jakaantuvat 1-, 2-, 3-, 4-, 6- ja 12-akselisiin symmetriatyyppeihin. Luvut 1, 2, 3, 4, 6 ja 12 ovat kaikki ne positiiviset kokonaisluvut, joilla jaettuna sävelluokkien kokonaismäärä 12 tuottaa osamääräksi kokonaisluvun. Edellytys joukon kuulumiselle n-akseliseen symmetriatyyppiin on siis se, että on olemassa n kappaletta intervalliavaruudellisia akseleita, joiden suhteen käännettäessä joukon sävelluokkasisältö pysyy muuttumattomana.

Normaalisti yhden symmetriatyypin piiriin kuuluu lukuisia joukkoja, jotka jäsentyvät useiksi eri joukkoluokiksi. n-akselisesti symmetrisistä joukoista muodostuvia joukkoluokkia nimitetään seuraavassa lyhyyden vuoksi vain n-akselisesti symmetrisiksi joukkoluokiksi.

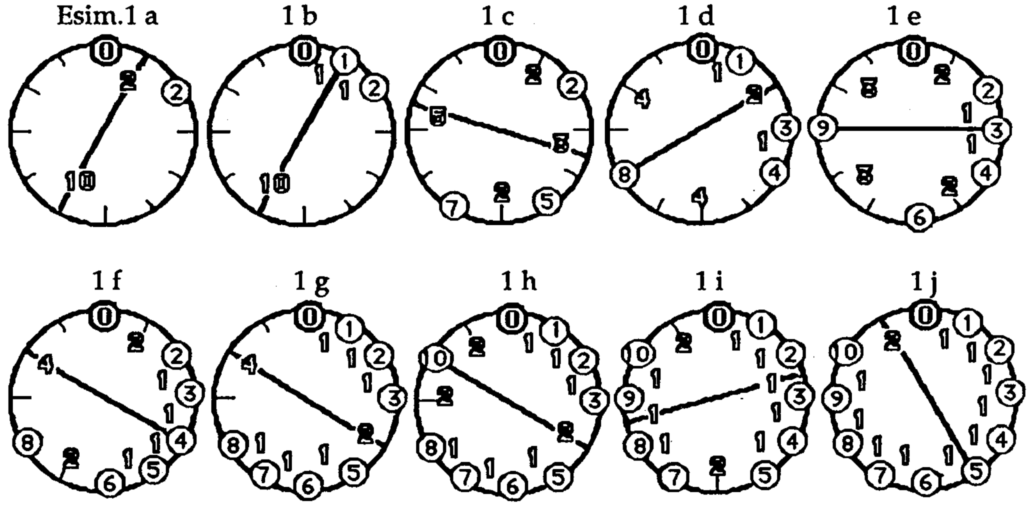
Kuuden akseleilla varustetun symmetriatyypin lisäksi on olemassa seitsemäs symmetriatyyppi, jolla ei ole akseleita lainkaan. Siihen kuuluvien kahden joukkoluokan jäsenjoukot ovat ainoat tapaukset, joissa kiertosymmetrisyyteen ei yhdisty samanaikaisesti käänteissymmetrisyys. Tästä seuraa, että ne ovat ainoat symmetriset joukkoluokat, joilla on käänteisjoukkoluokat. Tarkemmin sanottuna ne ovat *toistensa* käänteisjoukkoluokat: 6-30 A ja 6-30 B. Niihin viitattiin jo kohdassa 1.2. kaikkien kiertosymmetrioiden osajoukkona. Koska kaikki muut symmetriset joukot ovat (mahdollisen kiertosymmetrisyytensä ohella) käänteissymmetrioita ja niillä on ainakin yksi akseli, voidaan huomata että akseli on yksistään käänteisyyden merkki. Kiertosymmetria voi muodostua akseleittakin.

2. 2. KÄÄNTEISSYMMETRIAT

2.2.1. 1-AKSELISESTI SYMMETRISET JOUKKOLUOKAT

352:sta joukkoluokasta on symmetrisiä 98 eli n.28 %. Näistä yksiakselisesti symmetrisiä on 81 eli hieman vajaa 80 %. Kaikki 1-akseliset symmetriat ovat *pelkästään käänteissymmetrioita*. Kuten symmetriatyypin nimestäkin jo ilmenee, on jokaista 1-akselisesti symmetristä joukkoa kohden yksi ja vain yksi I-avaruudellinen akseli, jonka suhteen käännettäessä joukon sävelluokkasisältö säilyy muuttumattomana. Koska 1-akselisesti symmetristä joukkoa ei voida transponoida millään nollasta eriävällä transpositiointervallilla siten että syntyvä joukko on identtinen transponoimattoman kanssa, on jokaisesta 1-akselisesti symmetrisestä joukosta muodostettu joukkoluokka aina 12-jäsen-joukkoinen. Kaikkiaan 1-akselisesti symmetrisiä joukkoja on 81* 12 = 972 kappaletta eli n.24 % kaikista joukoista.

Esimerkki 1: yksiakselisesti symmetrisiä joukkoja. 1 a): 2-2, 1b): 3-1, 1 c): 4-23, 1 d): 5-Z17, 1 e): 6-Z45, 1 f): 7-8, 1 g): 8-6, 1h): 9-9, 1 i): 10-5, 1 j): 11-1.



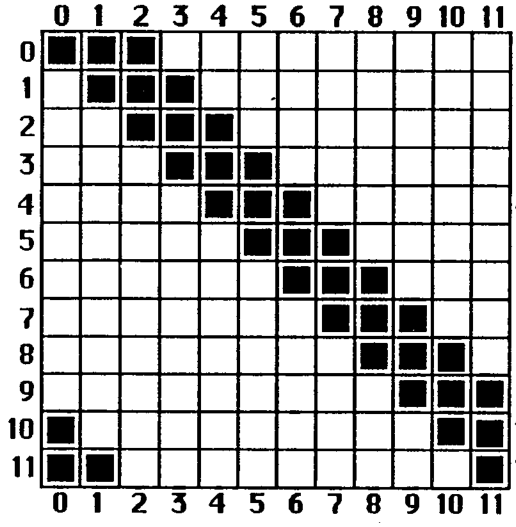
Symmetria-akselit on piirretty paksummalla viivalla kuin *Käsitteistöä* -luvun akselit, jotta tapausten ero kävisi ilmeiseksi. *Käsitteistöä* -luvussa tutkittiin joukkojen kääntymistä I-avaruudellisten akselien suhteen toisiksi joukoiksi. Nyt on tarkoitus osoittaa, minkä akselin suhteen jonkin joukon sävelluokat ovat ryhmittyneet symmetriseen asetelmaan.

Esimerkissä 1 a) on intervallikon -2,10- omaavan yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan 2-2 primaarimuoto {0,2} sijoitettu sävelluokkaympyrälle. Joukko on symmetrinen akselin toisena kiintopisteenä toimivan sävelluokan 1 suhteen, sillä molemmista jäsenistä on siihen yhtä pitkä matka. Joukko on symmetrinen myös akselin vastakkaisen kiintopisteen, sävelluokan 7 suhteen. Siihenkin on joukon molemmista jäsenistä yhtä pitkä matka.

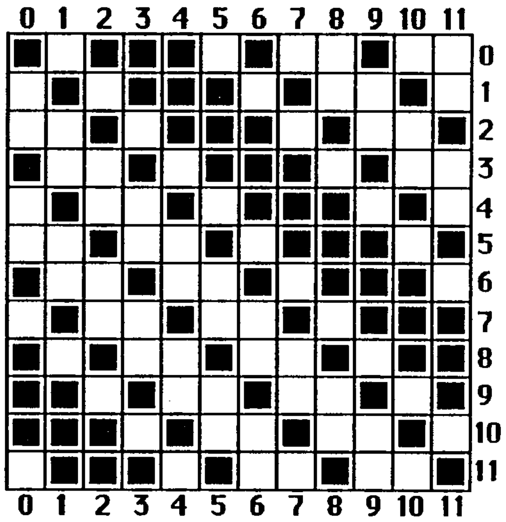
Symmetrisyys akselin molempien kiintopisteiden suhteen pätee kaikkiin tapauksiin. Moniakselisten symmetrioiden tapauksissa joukko on aina symmetrinen jokaisen akselin molempien kiintopisteiden suhteen.

Eräissä esityksissä todetaan, että kaikki I-avaruudelliset symmetriat ovat kaksiakselisia tai vaihtoehtoisesti, että ne ovat symmetrisiä kahden toisistaan kuuden puolisävelluokka-askeleen päässä olevan pisteen suhteen.[4] Tällöin tarkoitetaan samaa asiaa kuin tässä esityksessä tarkoitetaan symmetrisyydellä yhden akselin kahden kiintopisteen suhteen. Päädyin omaan sanamuotooni sävelluokkaympyrää käyttävän esitystavan vuoksi. Ympyröistähän käy varsin ilmeiseksi, että yksi akseli määrittää kaksi kiintopistettä, kaksi akselia neljä kiintopistettä jne. Kaksiakselisuusmääritelmä on periaatteessa aivan oikea, ainoastaan sikäli epätarkka, että pelkät kiertosymmetriat eivät kuulu sen piiriin ja että jokainen käänteissymmetria on *vähintään* kaksiakselinen, so. tämän esityksen terminologian mukaan yksiakselinen.

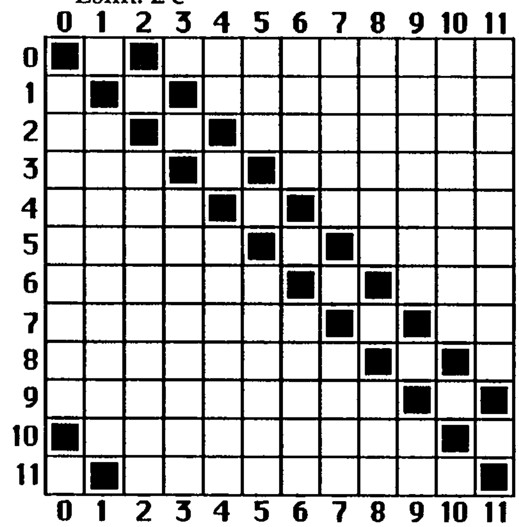
Esim. 2 a



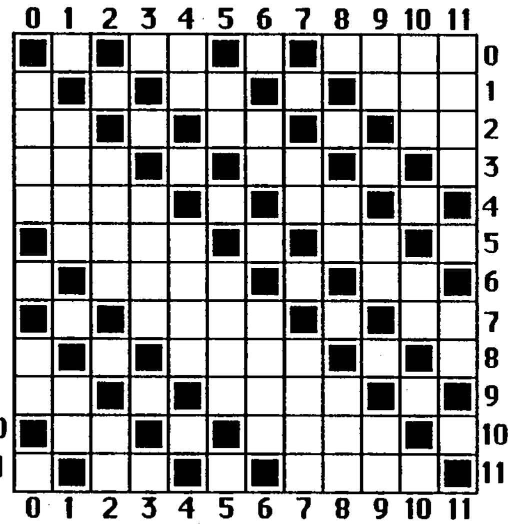
2 b



Esim. 2 c



2 d

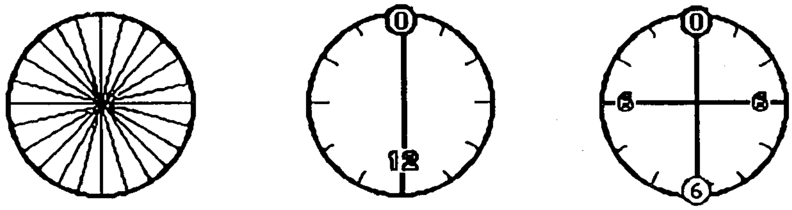


Esimerkki 2: Koska kaikissa 1-akselisesti symmetrisissä joukkoluokissa on 12 jäsenjoukkoa, ne ovat identtisiä 1-akselisesti symmetristen rakenteiden määrittämien instanssiluokkien kanssa. Siten ovat myös 1-akselisesti symmetrisistä joukkoluokista muodostetut jäsenjoukkomatriisit identtisiä vastaavan intervallikon omaavien instanssimatriisien kanssa. Esimerkeissä eräitä 1-akselisesti symmetristen joukkoluokkien jäsenjoukkomatriiseja. Kukin joukko on sävelluokkasisällöltään erilainen. 2 a): joukkoluokka 3-1, intervallikoltaan-1,1,10-. 2 b): joukkoluokka 6-Z45, intervallikoltaan -211233-2 c): joukkoluokka 2-2, intervallikoltaan -2,10-. 2 d): joukkoluokka 4-23, intervallikoltaan -2325-.

2.2.2. KEHYS, AKSELI

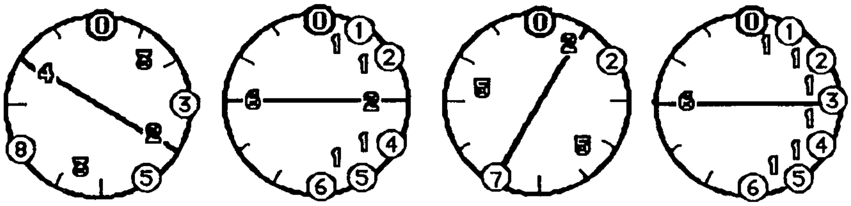
Intervalliavaruudellisen symmetrian käsite jaetaan lähempää tarkastelua varten kahteen osatekijään, akseliin ja *kehykseen*. Kehys muodostuu akselin ympärille peilikuvamaisesti ryhmittyneistä sävelluokista. Kehyksen käsitteen kannalta ei ole merkitystä, kuinka monesta sävelluokasta se koostuu. Itse asiassa on kolme symmetristä joukkoluokkaa, joiden kehykset eivät koostu sävelluokista lainkaan: 12-akselisesti symmetrinen tyhjä joukko (esim.3 a), yksiakselisesti symmetrinen 1-jäseninen joukkoluokka 1-1 (esimerkissä 3 b primaarimuoto), intervallikoltaan -12-, ja kaksiakseliseti symmetrinen joukkoluokka 2-6, intervallikoltaan -66- (toisen akselinsa osalta) . (Esimerkissä 3 c primaarimuoto). Kehys on kussakin tapauksessa tyhjä joukko, joten symmetrian määrittää pelkkä akseli.

Esim.3 a 3 b 3 c

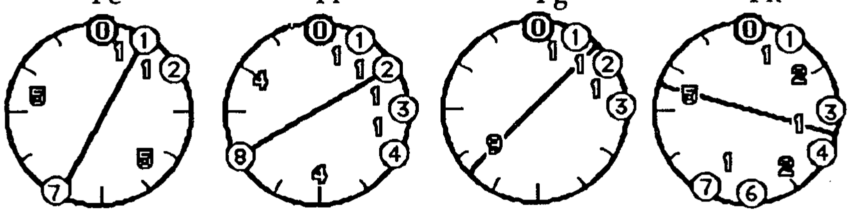


Akselityyppien pääryhmiä on kaksi: 1) akselit, joiden kiintopisteet sijoittuvat sävelluokille ja 2) akselit, joiden kiintopisteet sijoittuvat sävelluokkien väliin, neljäsosasävelluokille. (Esimerkkinä kategoriasta 2 kohdat g-h: joukkoluokkien 4-1 ja 6-Z13 pri-maarimuodot).

Esim.4 a 4 b 4 c 4 d



4 e 4 f 4 g 4 h



Akselit joiden kiintopisteet sijoittuvat sävelluokille, jakaantuvat edelleen kolmeen alaryhmään:

1 a) akselit,joiden kumpikaan kiintopiste ei kuulu joukkoon
(Esim.4 a-b: joukkoluokkien 4-26 ja 6-4 primaarimuodot)
1 b) akselit,joiden jompikumpi kiintopiste kuuluu joukkoon
(Esim.4 c-d: joukkoluokkien 3-9 ja 7-1 primaarimuodot)
1 c) akselit,joiden molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon
(Esim.4 e-f: joukkoluokkien 4-6 ja 6-Z37 primaarimuodot)

Parillisen kardinaalisuuden omaavat 1-akselisesti symmetriset joukkoluokat voivat olla akselityypeiltään 1a)-, 1c- tai 2) -kohdan mukaisia. Akselin täytyy osallistua joukkoon molemmista kiintopisteistään tai ei kummastakaan. Jos se osallistuisi vain toisesta, jäisi kehykseen pariton määrä sävelluokkia ja peilikuvamaisuus akselin suhteen ei voisi toteutua.

Parittoman kardinaalisuuden omaavat 1-akselisesti symmetriset joukkoluokat voivat olla akselityypeiltään vain 1b) -kohdan mukaisia. Yhden joukon jäsenen tulee aina kuulua akseliin, että kehykseen jäisi parillinen määrä jäseniä.

Tässä suhteessa moniakselisuus ei muuta tilannetta. Jokaisessa parillisen kardinaalisuuden omaavan moniakselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukossa kukin akseli on joukon jäsen molemmista kiintopisteistään tai ei kummastakaan.

Jokaisessa parittoman kardinaalisuuden omaavan moniakselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukossa kukin akseli on joukon jäsen vain toisen kiintopisteensä osalta. Parittoman kardinaalisuuden omaavat moniakselisesti symmetriset joukkoluokat ovat 3- tai 9-jäsenisiä. 1-,5-,7- ja 11-jäseniset symmetriat ovat kaikki 1-akselisia.

2.2.3. AKSELITYYPPIEN VAIKUTUS R-AVARUUDESSA

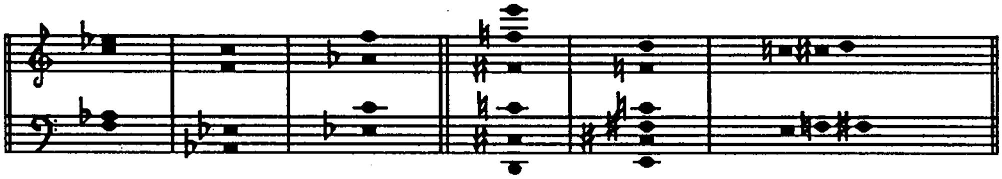
Useimmista symmetrisistä joukoista voidaan muodostaa R-avaruudessa symmetrisissä asetelmissa olevia säveltasokombinaatioita. Se kuinka suuri osa symmetrisen joukon tuottamista kaikista R-avaruudellisista säveltasokombinaatioista on symmetrisiä, riippuu joukon akselityypistä. (R-avaruuden ollessa ääretön ymmärrettäköön käsitteellä "kaikki R-avaruudelliset säveltasokombinaatiot" tapauksia jonkin mielekkään rekisterin, esim. pianon määrittämän, puitteissa).

I-avaruudessa käänteissymmetrinen joukko on, kuten edellä todettiin, symmetrinen aina akselin molempien kiintopisteiden suhteen, kuuluivatpa ne joukkoon tai eivät. Rekisteriavaruudessa sensijaan symmetrisestä joukosta johdettu säveltasokombinaatio voi olla symmetrisessä asetelmassa vain yhden kiintopisteen suhteen kerrallaan, toisen mahdollisuuden jäädessä käyttämättä.[5]

Jos akselin kumpikaan kiintopiste ei kuulu joukkoon - koskee siis ryhmiä 1a) ja 2) - kuuluvat kaikki joukon jäsenet tietenkin kehykseen. Tällöin kehyksestä voidaan muodostaa lukuisia symmetrisiä R-avaruudellisia säveltasokombinaatioita, sillä "käyttämättömäksi" jäävä toinen akselin kiintopiste ei pääse häiritsemään symmetrioiden muotoutumista. (Esim.5 a-f). Täten esimerkiksi *kaikki* kaksijäsenisistä joukoista muodostetut säveltasokombinaatiot ovat symmetrisiä.

Esimerkki 5: kohdissa 5 a-c on esimerkin 4 a joukosta 4-26/0 johdettuja symmetrisiä säveltasokombinaatioita. Kohdissa 5 d-f on esimerkin 4 b joukosta 6-Z4/0 johdettuja symmetrisiä säveltasokombinaatioita.

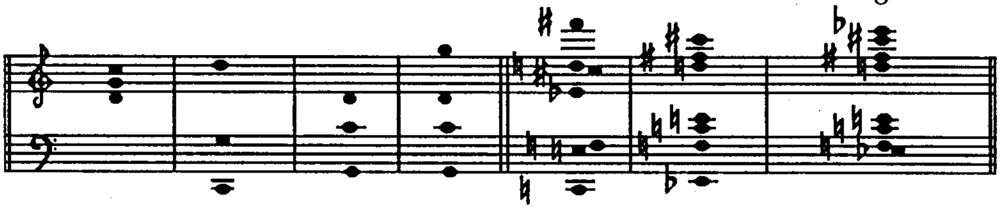
Esim. 5 a 5 b 5 c 5 d 5 e 5 f



Jos akselin toinen kiintopiste kuuluu joukkoon, (akselityyppi 1b), on joukosta johdettavissa vähemmän symmetrisiä säveltasokombinaatioita. R-avaruudellinen symmetria voi nimittäin toteutua tällöin vain niissä tapauksissa, joissa kehys ryhmitellään *joukkoon kuuluvaa kiintopistettä* edustavan sävelen ympärille (Esim.6 a, 6 b ja 6 e). Jos kehys ryhmitellään joukkoon kuulumatonta kiintopistettä edustavan sävelen ympärille, rikkoo joukkoon kuuluvaa kiintopistettä edustava sävel symmetrisen muodostelman kaikissa (kaksinnuksia sisältämättömissä) tapauksissa. (Esim.6 c ja 6 f). Edelliseen tapaukseen verrattuna on akselityypiltään 1 b:tä edustavista joukoista johdettavien R-avaruudellisten symmetrioiden määrä suhteessa pienempi. Kaksinnuksia käyttämällä on r-avaruudellinen symmetria näissäkin tapauksissa mahdollista muodostaa. (Esim.6 d ja 6 g).

Esimerkki 6: kohdissa a-d esimerkin 4 c joukosta 3-9/0 johdettuja säveltasokombinaatioita. Kohdissa e-g esimerkin 4 d joukosta 7-1/0 johdettuja säveltasokombinaatioita.

Esim.6 a 6 b 6 c 6 d 6 e 6 f 6 g



Jos akselin molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon, ei joukosta voi ilman kaksinnuksia muodostaa R-avaruudessa yhtään symmetristä säveltasokombinaatiota. Jokaisessa kaksinnuksia sisältämättömässä tapauksessa käyttämättömäksi jäävää kiintopistettä edustava sävel rikkoo symmetrian. Kaikki symmetriset joukkoluokat joiden akselin molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon, ovat siis eräänlaisia R-avaruudellisia piilosymmetrioita. Näitä joukkoluokkia on 13 kappaletta, 12 yksiakselisesti symmetristä joukkoluokkaa ja kaksiakselisesti symmetrinen joukkoluokka 8-25, jonka kummankin akselin molemmat päät kuuluvat joukkoon. Joukkoluokat ovat 4-6, 4-24, 6-Z28, 6-Z37, 6-Z45, 6-Z48, 8-3, 8-8, 8-21, 8-25 (2-aks.), 8-26, 10-2 ja 10-4.

Esimerkki 7: kohdissa a-c on esimerkin 4 e joukosta 4-6/0 johdettuja säveltasokombinaatioita. 7 c on kaksinnuksin saatu symmetriseen asetelmaan. Kohdissa d-g on esimerkin 4 f joukosta 6-Z37/0 johdettuja säveltasokombinaatioita. 7 e ja g on kaksinnuksin saatu symmetriseen asetelmaan.

Esim. 7 a 7 b 7 c 7 d 7 e 7 f 7 g

Niissä edellisistä tapauksista, joissa R-avaruudellinen symmetria voidaan kaksinnuksitta muodostaa, on luonnollisesti mahdollista muodostaa myös lukuisia epäsymmetrisiä R-avaruudellisia asetelmia.

Esimerkki 8: kohdissa a-b esimerkin 4 a joukosta 4-26/0 johdettuja säveltasokombinaatioita. Kohdissa c-d esimerkin 4 b joukosta 6-4/0 johdettuja säveltasokombinaatioita.

Esim.8 a 8 b 8 c 8 d

Pelkkää kiertosymmetrisyyttä edustavien joukkoluokkien 6-30 A ja 6-30 B jäsenjoukoilla ei ole akseleita, joten niistä ei voida myöskään muodostaa säveltasokombinaatioita, jotka ovat ryhmittyneet peilikuvamaisesti jonkin R-avaruudellisen kiintopisteen ympärille.

Jokaisesta symmetrisestä säveltasokombinaatiosta johdettava joukko on symmetrinen. Kaikki symmetrisestä joukosta johdettavat säveltasokombinaatiot eivät välttämättä ole symmetrisiä. Täten voi esimerkiksi säveltäjä symmetrisillä joukoilla operoidessaan tarkkailla akselityyppejä ja halutessaan peittää tai tuoda esiin materiaalin R-avaruudellisia symmetriaominaisuuksia. Toinen asia luonnollisesti on, minkälaisia kuulonvaraisesti havaittavia seuraamuksia tällaisilla toimenpiteillä on. Hämeenniemi ottaa selvän kannan: "...pelkästään I-avaruudessa esiintyvät symmetriset rakenteet ovat lähes aina mahdottomia kuulla".[6] Hän tarkoittanee, että I-avaruudellisen symmetrian tulee R-avaruudessakin olla symmetrisessä asettelussa, jotta sen symmetriaominaisuus olisi kuultavissa.

2.2.4. KEHYSPERHEET

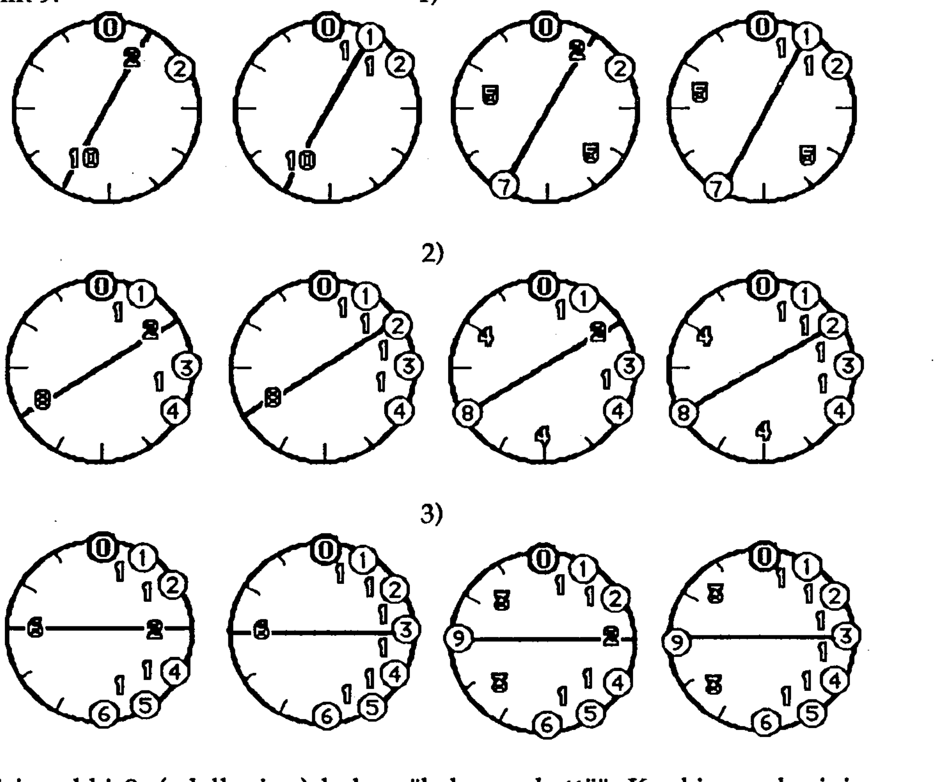
81:stä yksiakselisesti symmetrisestä joukkoluokasta kuuluu ryhmään 1 (akseli sävelluokilla) 54 joukkoluokkaa (66,7 %) ja ryhmään 2 (akseli sävelluokkien välissä) 27 joukkoluokkaa (33,3 %).

1 a)-ryhmässä on 2-, 4-, 6-, 8- ja 10-jäsenisiä joukkoluokkia, yhteensä 12 yksiakselisesti symmetristä joukkoluokkaa.

1 b)-ryhmään kuuluu 1-, 3-, 5-, 7-, 9- ja 11-jäsenisiä joukkoluokkia. Tässä ryhmässä on kaksi alaryhmää, sillä yksi kehys mahdollistaa kaksi "varianttia": akselin molempien kiintopisteiden määrittämien jäsenten muodostaessa vuoroin joukon kehyksen kanssa syntyy useimmiten kaksi eri joukkoluokkiin kuuluvaa joukkoa. (Esim.9). 1 b)- ryhmään kuuluu 30 yksiakselisesti symmetristä joukkoluokkaa.

1 c)-ryhmässä voi olla vain parillisen kardinaalisuuden omaavia, siis 2-, 4-, 6-, 8- tai 10-jäsenisiä joukkoja. Tässä ryhmässä on yhtä monta jäsentä, 12, kuin ryhmässä 1 a), sillä jokaista tyhjän akselin tapausta - pelkkä kehys - kohden on aina täyden akselin tapaus - joukon jäsenet muodostuvat kehyksestä ja akselin molemmista kiintopisteistä.

Esim 9: 1)



Esimerkki 9: (edell. sivu) kolme "kehysperhettä". Kunkin vaakarivin vasemmanpuoleinen joukko on pelkkä kehys. Vaakarivin kahdessa keskimmäisessä sävelluokkaympyrässä ovat tapaukset, joissa kiintopistevariantit

muodostavat vuoroin joukon kehyksen kanssa. Oikeanpuoleisimmassa tapauksissa kuuluvat molemmat kiintopisteet joukkoon.

Kaikista akselityyppiä 1 edustavista joukoista voidaan siis muodostaa yhteisen kehyksen perusteella toisiinsa liittyvien symmetrioiden ryhmiä. Kun mukaan otetaan moniakseliset symmetriat, jotka voivat osallistua useampaan perheeseen - olla tyhjän akselin tapauksena yhden akselinsa suhteen jossakin perheessä ja täyden akselin tapauksena toisen akselinsa suhteen jossain toisessa perheessä - saadaan yhteensä 20 kehysperhettä. (Taulukko alla). Useissa tapauksissa perheen ne kaksi jäsentä, joissa vain akselin toinen kiintopiste kuuluu joukkoon, ovat saman joukkoluokan jäsenjoukkoja.

Taulukko 1: kehysperheet

	tyhjä kehys	kehys+aks.1.k.p.	kehys+aks.2.k.p.	täysi kehys
1)	0-1	1-1	1-1	2-6*
2)	2-2	3-1	3-9	4-6
3)	2-4	3-6	3-12	4-24
4)	2-6*	3-10	sama	4-28
5)	4-3	5-1	5-17	6-Z37
6)	4-8	5-12	5-22	6-Z28
7)	4-21	5-8	5-34	6-Z45
8)	4-25 (1)	5-15	sama	6-7 *
9)	4-25 (2)	5-33	sama	6-35*
10)	4-26	5-37	5-35	6-Z48
11)	6-Z4	7-1	7-17	8-3
12)	6-7*	7-15	sama	8-25 (1)
13)	6-Z23	7-8	7-34	8-21
14)	6-Z26	7-37	7-35	8-26
15)	6-35*	7-33	sama	8-25 (2)
16)	6-Z49	7-12	7-22	8-8
17)	8-6	9-1	9-9	10-2
18)	8-24	9-6	9-12	10-4
19)	8-28	9-10	sama	10-6*
20)	10-6*	11-1	sama	12-1

Asteriski (*) viittaa moniakselisiin symmetrioihin, jotka kuuluvat kahteen perheeseen, ollen jossakin perheessä tyhjän akselin tapauksia ja jossakin toisessa perheessa täyden akselin tapauksia. Kahden keskimmäisen sarakkeen tapauspareja varten, joissa akselin kiintopisteet kuuluvat vuoroin joukkoon, muodostetaan valintakriteeri käyttäen perusteena kiintopistejäsenen etäisyyttä kehyksestä. Kahdesta mahdollisuudesta on 1. kiintopisteeksi (k.p.) nimetty se, josta on lyhyempi matka kehyksen lähimpiin jäseniin ja 2. kiintopisteeksi se, josta on pidempi matka kehyksen lähimpiin jäseniin. Jos molemmat tapaukset kuuluvat samaan joukkoluokkaan, lukee 2. kiintopisteen sarakkeessa "sama".

Tarkoitukseni ei ole esittää kehysperheen idealle asemaa yhtenä joukkojen välisten läheisyyden kriteereistä, esimerkiki Forten määrittelemien R-suhteiden tyyliin.[7] Kaikilla tämäntyyppisillä kriteereillähän on se yhteinen ongelma, että ne ovat ehdottoman eksakteja paperilla, mutta annetussa musiikillisessa tilanteessa niiden merkitys niin analyyttiselta kuin kuulohavainnolliseltakin kannalta saattaa liueta muiden huomiosta osansa vaativien aspektien joukkoon siinä määrin perusteellisesti, että kriteerin määrittämän suhteen todellinen ominaispaino saattaa jäädä varsin tulkinnanavaraiseksi kysymykseksi.

Miellettäköön kehysperheet tämän vuoksi vaikkapa vain näytöksi siitä, kuinka selkeäksi kokonaisuudeksi tietyt joukot on annetun symmetriaan liittyvän ominaisuuden avulla mahdollista järjestää.

2.2.5. 1-AKSELISESTI SYMMETRISTEN JOUKKOLUOKKIEN INTERVALLIKOT

Joukon symmetriaominaisuudet ovat todettavissa paitsi sävelluokkaympyrän, myös pelkän intervallikon avulla. Joukon käänteissymmetrisyys selviää tutkimalla, löytyykö sen intervallikosta jokin kohta, josta käsin myötä- ja vastapäivään (tai mikäli ajatellaan intervallikkoa numerojonona, sekä vasemmalta oikealle että oikealta vasemmalle) muodostuvat sykliset permutaatiot ovat identtiset. Mahdollisesti löytynyt kohta viittaa yhteen symmetria-akselin kiintopisteeseen.[8]

Tähän käänteissymmetristen intervallikoiden ominaisuuteen viitataan useissa teksteissä. "...total invariance under inversion can be created if an array is equal to one or more cyclic permutations of its retroversion".[9] "An inversionally symmetrical set always has a "canonical ordering" whose interval series is its own retrograde".[10] "[symmetrisissä] tapauksissa sama intervallikko voidaan lukea sävelluokkaympyräintervalleista sekä myötä- että vastapäivään".[11]

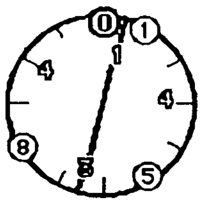
Koska käänteissymmetrinen joukko on aina symmetrinen akselin kummankin kiintopisteen suhteen, on ymmärrettävää että tämä ominaisuus näkyy myös intervallikosta. Näinollen, jos intervallikosta löytyy jokin identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottava kohta, löytyy sieltä automaattisesti myös toinen identtisen myötä- ja vastapäiväisen permutaation tuottava kohta. Ja aivan kuten moniakselisesti symmetrinen joukko on symmetrisessä asetelmassa jokaisen akselin kummankin kiintopisteen suhteen, on moniakselisesti symmetrisen joukon intervallikossa akselien kiintopisteiden summaa vastaava määrä identtisen myötä- ja vastapäiväisen permutaation tuottavia kohtia.

Yksiakselisesti symmetrisen joukon/joukkoluokan intervallikon tunnistaa siis aina siitä, että sillä on kaksi identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavaa kohtaa.

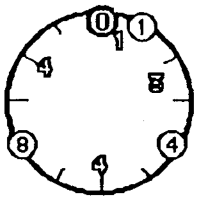
Esimerkki 10: joukkoluokan 4-20 intervallikko on -1434-. Jos lähtökohtana käytetään intervallia 1, saadaan molempiin suuntiin lukemalla syklinen permutaatio -1434-. Jos taas lähtökohtana käytetään intervallia 3, saadaan molempiin suuntiin lukemalla syklinen permutaatio -3414-. Muita identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavia kohtia ei ole. Joukkoluokka 4-20 on yksiakselisesti symmetrinen.

Esimerkki 11 :joukkoluokan 4-19 A intervallikko on -1344-. Intervallikosta ei löydy yhtään kohtaa, josta käsin luettuna myötä- ja vastapäiväinen syklinen permutaatio olisivat samat. Joukkoluokka 4-19 A on epäsymmetrinen.

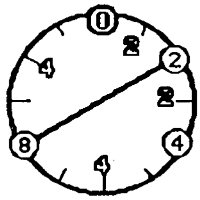
Esim.10



Esim.11



Esim.12



Esimerkki 12: joukkoluokan 4-24 intervallikko on -2244-. Jos tarkastelun lähtökohta sijoitetaan kahden kakkosen *väliin*, saadaan molempiin suuntiin luettuna sykliset permutaatiot -2442-. Jos lähtökohta tämän jälkeen sijoitetaan kahden nelosen väliin, saadaan molempiin suuntiin luettuna sykliset permutaatiot -4224-. Muita identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavia kohtia ei ole. Joukkoluokka 4-24 on yksiakselisesti symmetrinen.

Esimerkistä 12 käy ilmeiseksi, miksi edellä on puhuttu intervallikon "kohdasta", eikä esimerkiksi sen jäsenestä. Käänteissymmetrisyyden edellyttämä samanlainen myötä- ja vastapäiväinen syklinen permutaatio voi alkaa yhtä hyvin numerolta kuin kahden numeron välistäkin.

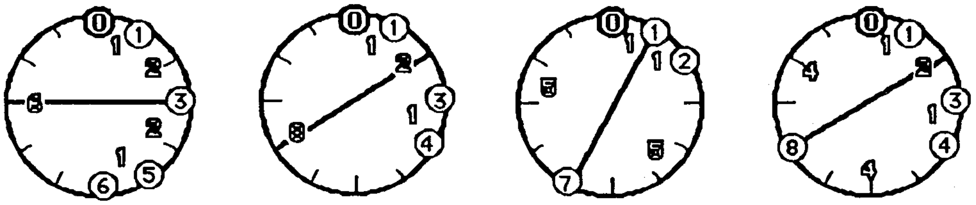
Esimerkki 13: joukkoluokan 5-12 intervallikko on -12216-. Jos lähtökohdaksi otetaan intervalli 6, saadaan molempiin suuntiin lukemalla syklinen permutaatio -61221-. Niinikään voidaan aloittaa kahden kakkosen välistä, jolloin saadaan molempiin suuntiin lukemalla syklinen permutaatio -21612-. Muita identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklinen permutaation tuottavia kohtia ei ole. Joukkoluokka 5-12 on yksiakselisesti symmetrinen.

Yksiakselisesti symmetrisen intervallikon identtiset myötä- ja vastapäiväismuodot tuottavat kohdat voivat siis sijoittua kahdelle numerolle, kahden numeroparin väliin tai yhtaikaisesti sekä numerolle että kahden numeron väliin. Tämä seikka liittyy kohdassa 2.2. esiteltyihin akselityyppeihin.

Koska intervallikon jäsenet viittaavat säveltasojen välisiin etäisyyksiin, on ilmeistä että mikäli symmetria-akselin kiintopiste osuu joukon jäsenille, osuu kiintopistettä vastaava identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottava kohta intervallikon jäsenten väliin ja päinvastoin.

Esimerkki 14: yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-3 intervallikossa -1218- osuvat molemmat saman myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavat kohdat intervallikon jäsenille. Kakkosesta lähdettäessä syklinen permutaatio on -2181- molempiin suuntiin ja kahdeksikosta lähdettäessä -8121- molempiin suuntiin. Ympyrää käyttävässä esitystavassa tämä merkitsee sitä,että kumpikaan akselin kiintopisteistä ei kuulu joukkoon. Primaarimuodossa joukon jäsenet ovat {0,1, 3,4}, akselin kiintopisteiden sijoittuessa sävelluokille 2 ja 8.

Esim:13 14 15 16



Esimerkki 15: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-6 intervallikossa -1155- osuvat molemmat identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavat kohdat intervallikon jäsenten väliin. Kahden ykkösen välistä lähdettäessä syklinen permutaatio on -1551- molempiin suuntiin, ja kahden viitosen välistä lähdettäessä -5115- molempiin suuntiin. Ympyräesityksestä huomataan, että akselin molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon. Primaarimuodossa joukon jäsenet ovat {0,1,2,7}, kiintopisteiden sijoittuessa sävelluokille 1 ja 7.

Esimerkki 16: yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan 5Z-17 intervallikossa -12144- osuu toinen identtisen myötä- ja vastapäiväisen syklisen permutaation tuottavista kohdista intervallikon jäsenelle ja toinen kahden jäsenen väliin. Kakkosesta lähdettäessä syklinen permutaatio on -21441- molempiin suuntiin, ja kahden nelosen välistä lähdettäessä -41214- molempiin suuntiin. Ympyräesityksestä nähdään, että akselin toinen kiintopiste kuuluu joukkoon ja toinen ei. Primaarimuodossa joukon jäsenet ovat {0,1,3,4,8}. Kiintopisteet osuvat säveltasoille 2 - ei kuulu joukkoon - ja 8 - kuuluu joukkoon.

Kohdassa 2.2. kävi ilmi, että on olemassa kahdenlaisia tapauksia, joissa akselin kumpikaan pää ei kuulu joukkoon. Kohdan 1 a) tapauksissa kiintopisteet sijoittuvat sävelluokille ja kohdan 2) tapauksissa kiintopisteet sijoittuvat sävelluokkien väleihin. Intervallikoissa ilmenee kiintopisteiden joukkoon kuulumattomuus identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavien kohtien sijoittumisena intervallikon jäsenille.

Niissä tapauksissa, joissa kiintopisteet sijoittuvat sävelluokille, ovat molemmat identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävät intervallikon jäsenet *parillisia*. Niissä tapauksissa, joissa kiintopisteet sijoittuvat sävelluokkien väleihin, ovat molemmat identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävät intervallikon jäsenet *parittomia*.

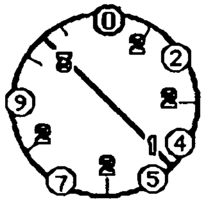
Tämä johtuu siitä, että kiintopisteet osuvat molempien identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävien intervallikon jäsenten ajateltuun keskipisteeseen. Jos jokin tällainen jäsen on intervallikossa esimerkiksi intervalli 3, tarkoittaa tämä joukon tasolla sitä, että akselin kiintopiste osuu paikkaan, josta on sekä myötä- että vastapäivään kuljettaessa yhtä pitkä matka joukon lähimpiin jäseniin, ja että tuo matka on puolet kolmesta puolisävelluokka-askeleesta eli puolitoista puolisävelluokka-askelta. Toisen kiintopisteen osuessa kuuden puolisävelluokka-askeleen päähän sijoittuu akseli sävelluokkien väliin.

Jos identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävä intervallikon jäsen on numeroarvoltaan 1, merkitsee tämä joukossa sitä, että kiintopisteestä on matkaa lähimpiin joukon jäseniin neljäsosasävelluokka-askel. Jos jäsen on intervallikossa numeroarvoltaan 5, on kiintopisteestä matkaa joukon lähimpiin jäseniin kaksi ja puoli puolisävelluokka-askelta jne.

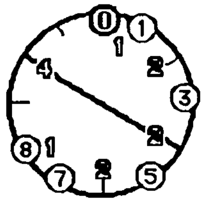
Jos taas identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävä intervallikon jäsen on parillinen, osuu akselin kiintopiste ympyrällä (intervallikon jäsenen ajatellun puolittamisen jälkeen) aina sävelluokalle. Kahdella jaettuna parillinen intervallikon jäsen tuottaa aina osamääräksi kokonaisluvun.

Esimerkki 17: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 6-32 intervallikossa -221223- identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavat kohdat sijoittuvat jäsenille 1 ja 3. Sykliset permutaatiot ovat -122322- ja -322122-. Näiden intervallikon jäsenten numeroarvojen jakaminen kahdella osoittaa, että akselin toisesta kiintopisteestä on joukon lähimpiin jäseniin matkaa neljäsosasävelluokka-askel ja toisesta puolitoista puolisävelluokka-askelta. Primaarimuodon {0,2,4, 5,7,9} tapauksessa toinen kiintopiste sijoittuu sävelluokkien 4 ja 5 väliin, toinen sävelluokkien 10 ja 11 väliin.

Esim. 17



Esim. 18



Esimerkki 18: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 6-Z26 intervallikossa -122214- identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavat kohdat sijoittuvat keskimmäiselle kakkoselle sekä neloselle. Sykliset permutaatiot ovat -221412- ja -412221-. Kakkosen ja nelosen numeroarvojen jakaminen kahdella osoittaa, että akselin toisesta kiintopisteestä on joukon lähimpiin jäseniin matkaa 1 puolisävelluokka-askel, toisesta kaksi puolisävel-

luokka-askelta. Kiintopisteet sijoittuvat näinollen sävelluokille. Primaarimuodon {0,1,3,5,7,8} tapauksessa toinen kiintopiste sijoittuu sävelluokalle 4 ja toinen sävelluokalle 10.

2.2.6. AKSELIN SIJOITTUMINEN JÄSENJOUKOISSA

Intervallikosta voidaan päätellä, mille sävelluokille tai minkä sävelluokkien väliin symmetria-akselin kiintopisteet sijoittuvat joukkoluokan kussakin jäsenjoukossa.

Intervallikon alusta etsitään ensimmäinen identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottava kohta. Ensimmäinen kriteerit täyttävä kohta riittää, sillä toinen kohta sijoittuu joka tapauksessa kuuden puolisävelluokka-askeleen päähän.

Jos ensimmäinen akselin kiintopistettä osoittava kohta sijoittuu kahden numeron väliin, on kiintopisteen etäisyys intervallikon alusta sama kuin kohdan vasemmalle puolelle jäävien intervallikon jäsenten summa.

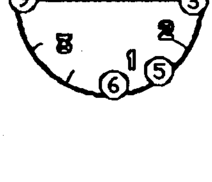
Esimerkki 19 : yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan 6-Z28 intervallikossa -122133- on ensimmäinen identtisen myötä-ja vastapäiväispermutaation tuottava kohta kahden kakkosen välissä. Symmetria-akselin kiintopisteen etäisyys intervallikon alusta on todetun kohdan vasemmalla puolella olevien jäsenten summa, 1+2=3. Akselin kuuden puolisävelluokka-askeleen päässä olevan toisen kiintopisteen etäisyys on 3+6=9.

Tällöin on saatu selville vasta kiintopisteiden *suhteellinen* sijainti intervallikon sisällä. Tietyn jäsenjoukon akselin kiintopisteiden todellisen sijainnin selvittämiseksi tarvitaan myös joukon normaalijäsenen numeroarvo. Se lisätään kiintopisteitä osoittavien kohtien numeroarvoihin. Saadut kaksi summaa osoittavat joukon symmetria-akselin kiintopisteiden sijainnin.

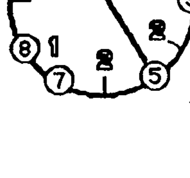
Kun tutkitaan joukkoluokan 6-Z28 primaarimuodon symmetria-akselin kiintopisteiden sijainnit, lasketaan niiden etäisyyttä intervallikon alusta osoittavien intervallien numeroarvoihin normaalijäsenen numeroarvo 0. 0+3=3 ja 0+9=9. Primaarimuodon symmetria-akselin kiintopisteet sijaitsevat sävelluokilla 3 ja 9. (Esim.19 a).

Tutkittaessa 2. jäsenjoukon symmetria-akselin kiintopisteet lasketaan 2+3=5 ja 2+9=11. Kiintopisteet sijaitsevat sävelluokilla 5 ja 11. (Esim.19 b).

Esim. 19 a



19 b

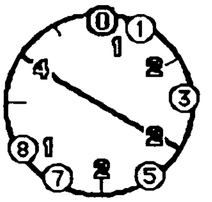


Jos 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan intervallikossa ensimmäinen identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävä kohta osuu intervallikon jäsenelle, selviää kiintopisteen suhteellinen etäisyys intervallikon alusta laskemalla yhteen todetun kohdan vasemmalla puolella olevat jäsenet ja *puolet* itse kohdan määrittävän jäsenen numeroarvosta.

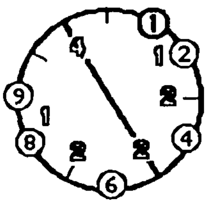
Esimerkki 20: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 6-Z26 intervallikossa -122214- on ensimmäinen identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation määrittävä kohta keskimmäisellä kakkosella. Akselin kiintopisteen etäisyys intervallikon alusta selviää laskemalla yhteen keskimmäisen kakkosen vasemmalla puolella olevat jäsenet, 1+2=3, sekä lisäämällä summaan puolet keskimmäisen kakkosen numeroarvosta: 3+1=4. Akselin toisen kiintopisteen etäisyys intervallikon alusta on 4+6=10.

Normaalijäsenellä n varustetun jäsenjoukon kiintopisteiden sijainti selviää tämän jälkeen laskemalla n+4 ja n+10. Primaarimuodon tapauksessa lasketaan 0+4=4 ja 0+10=0. Kiintopisteet sijaitsevat sävelluokilla 4 ja 10. (Esim. 20 a). 1. jäsenjoukon symmetria-akselin kiintopisteet sijaitsevat sävelluokilla 1+4=5 ja 1+10=11. (Esim. 20 b). 4. jäsenjoukon symmetria-akselin kiintopisteet sijaitsevat puolestaan sävelluokilla 4+4=8 ja 4+10=14=2. (Esim. 20 c).

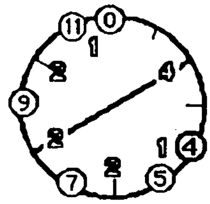
Esim.20 a



20 b



20 c



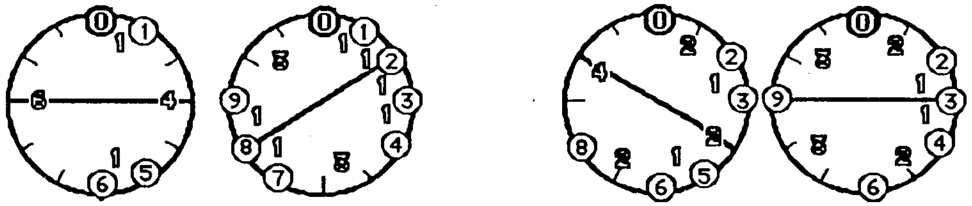
2. 3. KOMPLEMENTTIJOUKKOLUOKKIEN SYMMETRISYYS

Komplementtijoukkoluokkien[12] keskinäinen suhde symmetriaan noudattelee tarkkoja lainalaisuuksia. Jos joukkoluokka on symmetrinen, on sen komplementtijoukkoluokkakin aina symmetrinen. Symmetrisillä komplementtijoukkoluokilla on yhteinen symmetriatyyppi. n-akselisesti symmetrisen joukkoluokan komplementtijoukkoluokka on myös n-akselisesti symmetrinen.

Jos yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukoissa akselin kumpikaan kiintopiste ei ole joukon jäsen, on sen yksiakselisesti symmetrisen komplementtijoukkoluokan jäsenjoukoissa akselin kumpikin kiintopiste joukon jäsen.

Esim.21 a): joukkoluokan 4-8 primaarimuoto. 21 b): 4-8:n komplementtiluokan, joukkoluokan 8-8 primaarimuoto. 21 c): joukkoluokan 6-Z23 primaarimuoto. 21 d): 6-Z23:n komplementtiluokan, joukkoluokan 6-Z45 primaarimuoto.

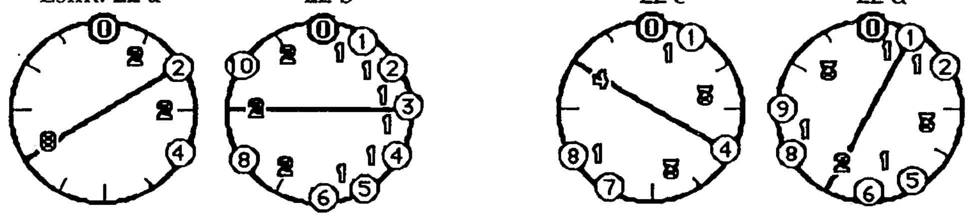
Esim. 21 a 21 b 21 c 21 d



Jos yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukoissa akselin toinen kiintopiste on joukon jäsen, on myös sen yksiakselisesti symmetrisen komplementtijoukkoluokan jäsenjoukoissa akselin toinen kiintopiste joukon jäsen.

Esim.22 a): joukkoluokan 3-6 primaarimuoto. 22 b): 3-6:n komplementtiluokan, joukkoluokan 9-6 primaarimuoto. 22 c): joukkoluokan 5-22 primaarimuoto. 22 d): 5-22:n komplementtiluokan, joukkoluokan 7-22 primaarimuoto.

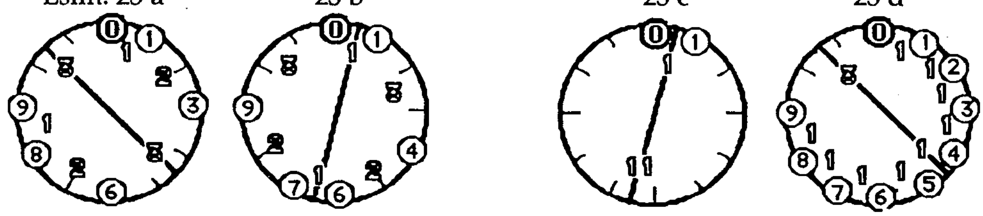
Esim. 22 a 22 b 22 c 22 d



Jos yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukoissa akseli on sävelluokkien välissä, on myös sen yksiakselisesti symmetrisen komplementtijoukkoluokan jäsenjoukoissa akseli sävelluokkien välissä.

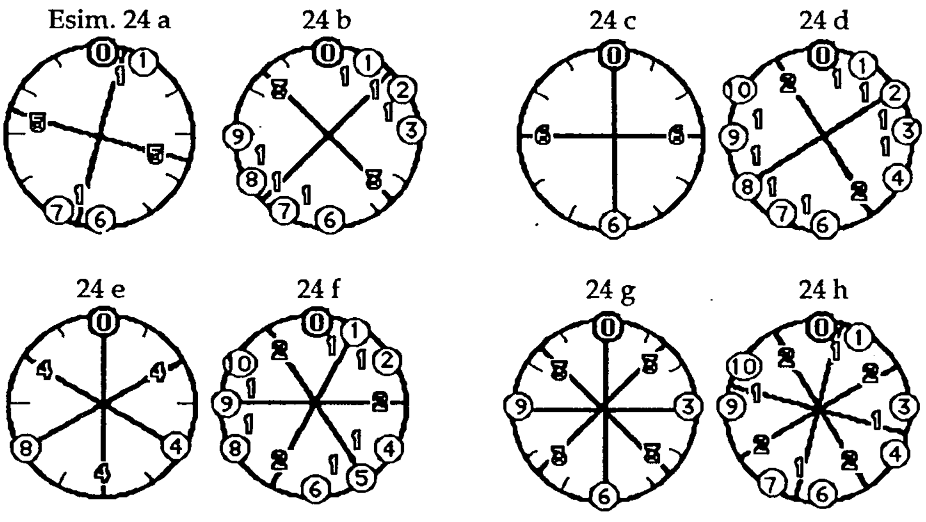
Esim.23 a): joukkoluokan 6-Z29 primaarimuoto. 23 b): 6-Z29:n komplementtiluokan, joukkoluokan 6-Z50 primaarimuoto. 23 c): joukkoluokan 2-1 primaarimuoto. 23 d): 2-1:n komplementtiluokan, joukkoluokan 10-1 primaarimuoto.

Esim. 23 a 23 b 23 c 23 d



Samat komplementtijoukkoluokkien akseleita koskevat lainalaisuudet pätevät myös moniakselisesti symmetristen komplementtijoukkoluokkien välillä. Jos tietyssä moniakselisesti symmetrisessä joukossa on akseli jonka molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon, on sen komplementtijoukossa akseli jonka kumpikaan kiintopiste ei kuulu joukkoon. Jos tietyssä moniakselisesti symmetrisessä joukossa on akseli jonka toinen kiintopiste kuuluu joukkoon, on sen komplementtijoukossa niinikään akseli jonka toinen kiintopiste kuuluu joukkoon. Jos tietyssä moniakselisesti symmetrisessä joukossa osa akseleista on sävelluokilla ja osa sävelluokkien väleissä, on sen komplementtijoukossakin osa akseleista sävelluokilla ja osa sävelluokkien väleissä. Komplementtien välinen akselien "tase" säilyy siis aina vakiona.

Esim.24 a): joukkoluokan 4-9 primaarimuoto. 24 b): 4-9:n komplementtiluokan, joukkoluokan 8-9 primaarimuoto. 24 c): joukkoluokan 2-6 primaarimuoto. 24 d): 2-6:n komplementtiluokan, joukkoluokan 10-6 primaarimuoto. Esim.24 e): joukkoluokan 3-12 primaarimuoto. 24 f): 3-12:n komplementtiluokan, joukkoluokan 9-12 primaarimuoto. 24 g): joukkoluokan 4-28 primaarimuoto. 24 h): 4-28:n komplementtiluokan, joukkoluokan 8-28 primaarimuoto.



Koska akselit käyttäytyvät aina komplementtisuhteissa ennustettavalla tavalla, seuraa tästä myös äskeisten kehysperheiden komplementtisuus kokonaisuuksina. Tiettyyn perheeseen kuuluvien joukkoluokkien komplementtijoukkoluokat muodostavat keskenään oman perheen. Tyhjän akselin perheenjäsentä edustavan joukkoluokan komplementtijoukkoluokasta tulee komplementtiperheessä täyden akselin perheenjäsentä edustava joukkoluokka ja päinvastoin. Kahden keskimmäisen sarakkeen jäsenet ovat keskimmäisiä komplementtiperheissäkin.

2. 4. KIERTOSYMMETRIAT

Kiertosymmetrisiä joukkoluokkia on 17 kappaletta. Näistä tyhjä joukkoluokka 0-1, jonka ainoa jäsenjoukko on tyhjä joukko, muodostaa erikoistapauksen. Se ei koostu sävelluokkia sisältävistä joukoista eikä sillä ole intervallikkoa. Seuraavassa käsitellään kuuttatoista sävelluokkajoukoista koosuvaa ja intervallikon omaavaa kiertosymmetristä joukkoluokkaa, vaikka myös tyhjää joukkoa ja tyhjää joukkoluokkaa tullaan lyhyesti sivuamaan. Yhteensä sävelluokista koostuvia kiertosymmetrisiä joukkoja on 75 kappaletta, eli alle 2 % kaikkien joukkojen määrästä.

Kiertosymmetriset joukkoluokat jakautuvat kahteen alaryhmään, *pelkkiin kiertosymmetrioihin* ja *moniakselisiin symmetrioihin*. Pelkkiin kiertosymmetrioihin lukeutuu kaksi akselitonta käänteisjoukkoluokkaa, 6-30 A ja 6-30 B. Intervallikon omaaviin moniakselisiin symmetrioihin lukeutuu 14 joukkoluokkaa, jotka ovat 2-, 3-, 4-, 6- tai 12-akselisia. (Ks. kohta 1.4).

2.4.1. KIERTOSYMMETRISTEN JOUKKOLUOKKIEN INTERVALLIKOT

Joukkoluokan suhde kiertosymmetrisyyteen on helposti havaittavissa sen intervallikosta. Jokaisen kiertosymmetrisen joukkoluokan intervallikko koostuu *kahdesta tai useammasta keskenään samanlaisesta jaksosta*. Yhdenkään epäsymmetrisen tai 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan intervallikossa sitävastoin jaksollisuutta ei ole.[13]

2.4.2. KIERTOSYMMETRISTEN JOUKKOLUOKKIEN JÄSENJOUKKOJEN MÄÄRÄT

Kiertosymmetrinen joukko on itseensäkiertyvyytensä vuoksi *rajoitetusti transponoituva*. Sitä voidaan toki transponoida kaikilla kahdellatoista transpositiointervallilla - mahdollisten transpositioiden määrä on symmetriaominaisuuksista riippumaton tekijä - mutta osa transpositioista on aina sävelluokkasisällöiltään keskenään identtisiä. Tästä seuraa, että kiertosymmetrisessä joukkoluokassa on aina vähemmän kuin 12 jäsenjoukkoa. Niiden lukumäärä on yhtä suuri kuin intervallikon *yhden jakson jäsenten numeroarvojen summa*.

Vaihtoehtoisesti jäsenjoukkojen määrä selviää jakamalla kaikkien transpositioiden määrä, 12, intervallikon jaksojen lukumäärällä.[14]

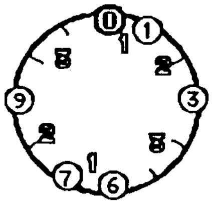
2.4.3. PELKÄT KIERTOSYMMETRIAT

Joukkoluokkien 6-30 A ja 6-30 B intervallikot ovat -123123- ja -213213-. Kumpikin koostuu kahdesta jaksosta, A kahdesti jaksosta 123 ja B kahdesti jaksosta 213.

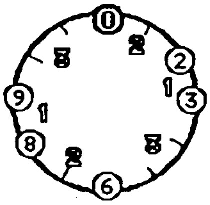
Transponoitaessa 6-30 A:n tai 6-30 B:n mielivaltaista jäsenjoukkoa kaikilla transpositiointevalleilla tuottavat transpositiointervalli t ja transpositiointervalli t+6 aina samansisältöisen joukon. Jäsenjoukkojen lukumäärä kummassakin joukkoluokassa on 6. (1+2+3=6 / 2+1+3 =6 tai vaihtoehtoisesti: 12 jaettuna jaksojen lukumäärällä 2 = 6). Kaikkiaan pelkästään kiertosymmetrisiä joukkoja on 2*6=12 kappaletta. Käänteissymmetrisyyden puuttuminen näkyy intervallikoissa siitä, että identtisiä myötä- ja vastapäiväispermutaatioita tuottavia kohtia ei ole. Joukkoluokkien käänteisyys sensijaan näkyy siitä, että jokaista A:n syklistä permutaatiota kohden on päinvastainen B:n syklinen permutaatio.[15]

Esimerkki 25: joukkoluokkien 6-30 A ja 6-30 B primaarimuodot sävelluokkaympyröillä.

Esim.25 a



25 b



Kiertosymmetrioiden tapauksissa voidaan jäsenjoukkomatriiseja ja instanssimatriiseja vertailemalla havainnollistaa kiertosymmetristen joukkoluokkien erityispiirteitä. Jäsenjoukkomatriisissa on aina vähemmän kuin 12 jäsenjoukkoa. Instanssimatriisissa sensijaan on symmetriaominaisuuksista riippumatta 12 jäseninstanssia. Alle 12-jäsenjoukkoisuudesta huolimatta kiertosymmetristä joukkoa voidaan transponoida kaikilla kahdellatoista transpositiointervallilla, jolloin osa transpositioista on samansisältöisiä. Näinollen intervallikon E omaavasta kiertosymmetrisestä rakenteesta johdettu instanssimatriisi on samanlainen kuin matriisi, johon on koottu saman intervallikon E omaavan kiertosymmetrisen joukon kaikki transpositiot.[16]

Esim. 25 c

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
■	■		■			■	■		■			0
	■	■		■			■	■		■		1
		■	■		■			■	■		■	2
■			■	■		■			■	■		3
	■			■	■		■			■	■	4
■		■			■	■		■			■	5

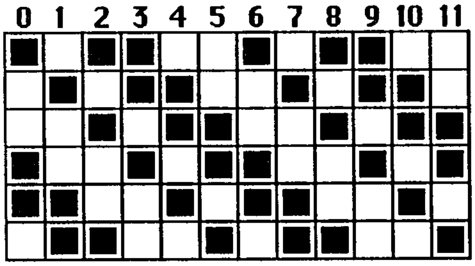
25 d

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	■	■		■			■	■		■			0
1		■	■		■			■	■		■		1
2			■	■		■			■	■		■	2
3	■			■	■		■			■	■		3
4		■			■	■		■			■	■	4
5	■		■			■	■		■			■	5
6	■	■		■			■	■		■			6
7		■	■		■			■	■		■		7
8			■	■		■			■	■		■	8
9	■			■	■		■			■	■		9
10		■			■	■		■			■	■	10
11	■		■			■	■		■			■	11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

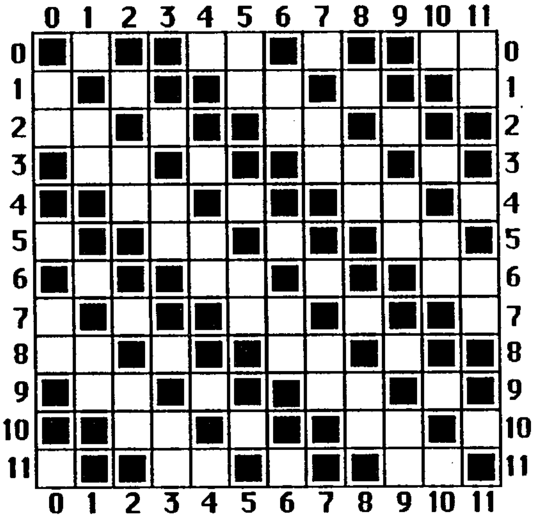
Esimerkissä 25 c on joukkoluokan 6-30 A, intervallikoltaan -123123-, jäsenjoukkomatriisi. Esimerkissä 25 d on intervallikon -123123- omaavasta rakenteesta johdettu instanssimatriisi.

Esimerkissä 25 e on joukkoluokan 6-30 B, intervallikoltaan -213213-, jäsenjoukkomatriisi. Esimerkissä 25 f on intervallikon -213213- omaavasta rakenteesta johdettu instanssimatriisi.

Esim. 25 e



25 f



2.4.4. MONIAKSELISET SYMMETRIAT

Kaikki moniakseliset symmetriat ovat sekä kierto- että käänteissymmetrioita. Pelkkien kiertosymmetrioiden tapaan moniakselisesti symmetrisen joukkoluokan intervallikko on jaksollinen. Tämän lisäksi siinä on identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavia kohtia. n-akselisesti symmetrisen joukkoluokan intervallikossa identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavia kohtia on 2 * n kappaletta. (Ks. kohta 2.5.). Intervallikon jaksojen lukumäärä on sama kuin akselien määrä, joten jäsenjoukkoja on 12 jaettuna akselien määrällä.

2.4.4.1. 2-akselisesti symmetriset joukkoluokat

Käsitteistöä -luvun kohdassa 6 (*Joukkoluokkien muodostuksesta*) tutkittiin n-jäsenisten joukkoluokkien määriä selvittämällä, kuinka monta erilaista (normaalijärjestyksistä) kahdeksitoista summautuvaa n-jäsenistä numerojonoa on olemassa. Kukin numerojono vastaa yhtä intervallikkoa, joista kukin viittaa yhteen joukkoluokkaan. Vastaavaa tekniikkaa käyttäen voidaan tutkia n-akselisesti symmetristen joukkoluokkien määriä.

Seuraavassa selvitetään, kuinka monta 2-akselisesti symmetristä joukkoluokkaa on olemassa. Jokaisen tällaisen joukkoluokan intervallikko on koostunut kahdesta identtisestä jaksosta, ja jäsenten summa on kardinaalisuudesta riippumatta 12. Toisaalta tiedetään, että pelkkää kiertosymmetrisyyttä edustavien joukkoluokkien 6-30 A ja 6-30 B intervallikot ovat niinikään 2-jaksoisia, mutta niiltä puuttuvat identtiset myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavat kohdat.

Tämän perusteella voidaan päätellä, että 2-akselisesti symmetrisiä joukkoluokkia on yhtä monta kuin kahdeksitoista summautuvia normaalijärjestyksisiä numerojonoja, jotka a) koostuvat kahdesta identtisestä jaksosta, b) sisältävät identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavia kohtia. Kriteerit täyttäviä tapauksia on 7 kappaletta:

```
1) 6+6 = 12,                    2) 1+5+1+5 = 12,
3) 2+4+2+4 = 12,                4) 1+1+4+1+1+4 = 12,
5) 1+1+1+3+1+1+1+3 = 12,        6) 1+1+2+2+1+1+2+2 = 12,
7) 1+1+1+1+2+1+1+1+1+2 = 12
```

Muodot 4+2+4+2=12, 5+1+5+1=12, 1+4+1+1+4+1=12 jne. ovat normaalijärjestyksisten jonojen syklisiä permutaatioita.

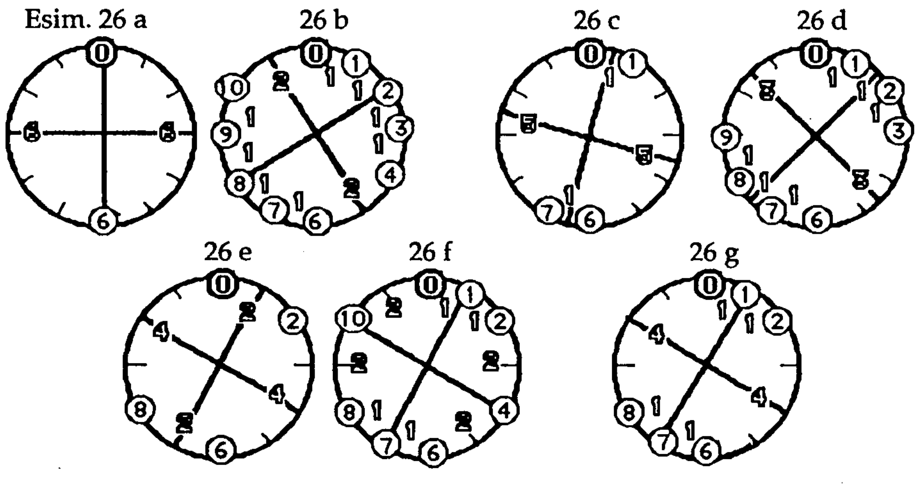
Jokaisen yhteenlaskettavien jonon vastatessa yhtä intervallikkoa ja kunkin intervallikon viitatessa yhteen joukkoluokkaan on kaksiakselisesti symmetrisiä joukkoluokkia seitsemän kappaletta:

Komplementtijoukkoluokkapari 2-6/10-6, intervallikoiltaan -66- ja -1111211112-. (Esim.26 a-b).

Komplementtijoukkoluokkapari 4-9/8-9, intervallikoiltaan -1515- ja -11131113-. (Esim. 26 c-d).

Komplementtijoukkoluokkapari 4-25/8-25, intervallikoiltaan -2424- ja -11221122-. (Esim.26 e-f).

Itsekomplementoiva heksakordi 6-7, intervallikoltaan -114114- (Esim.26 g). Esimerkeissä joukkoluokkien primaarimuodot.

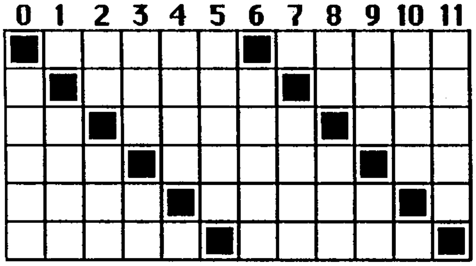


Kaikki 2-akseliset symmetriat edustavat parillisia kardinaalisuuksia. Tämä on ilmeistä, sillä parittomasta määrästä kokonaislukuja ei voi summata kahtatoista siten, että yhteenlaskettavista luvuista olisi muodostettavissa kaksijaksoinen numerosarja.

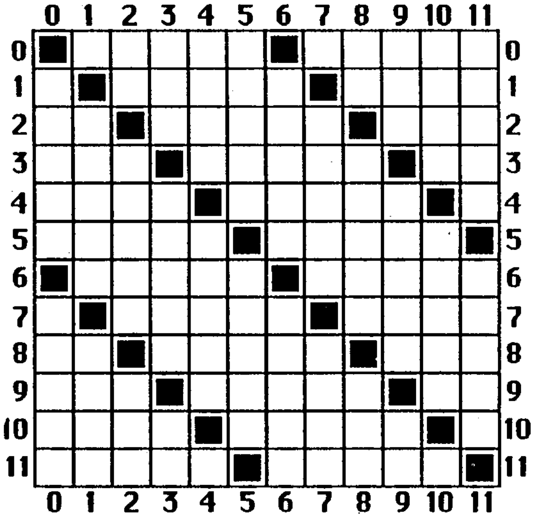
Kussakin kaksiakselisesti symmetrisessä joukkoluokassa on kuusi jäsenjoukkoa. Kaikkiaan 2-akselisesti symmetrisiä joukkoja on 7*6=42 kappaletta. 2-akselisesti symmetrisen rakenteen määrittämässä instanssimatriisissa sävelluokkasisällöltään identtiset instanssit sijaitsevat kuuden puolisävelluokka-askeleen päässä toisistaan.

Esimerkissä 27 a-n ovat kaksiakselisesti symmetristen joukkoluokkien jäsenjoukkomatriisit (vasemmalla), vierellään samat intervallikot omaavista rakenteista johdetut instanssimatriisit (oikealla).

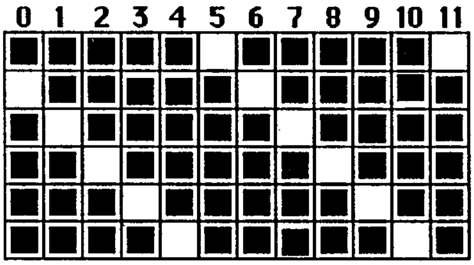
Esim.27 a: 2-6



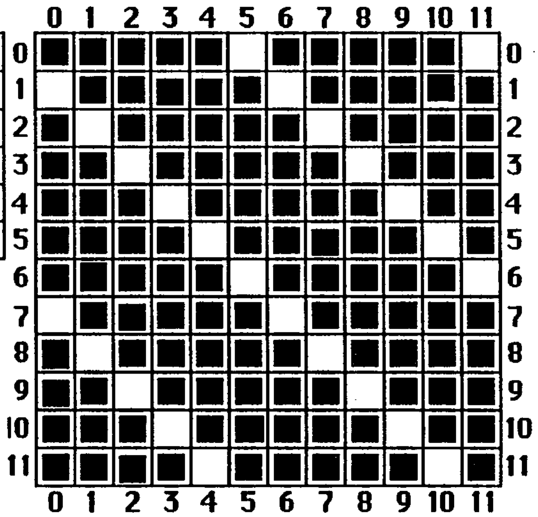
Esim.27 b: inst.matr. -66-



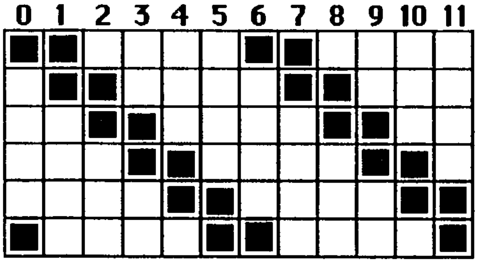
Esim. 27 c: 10-6



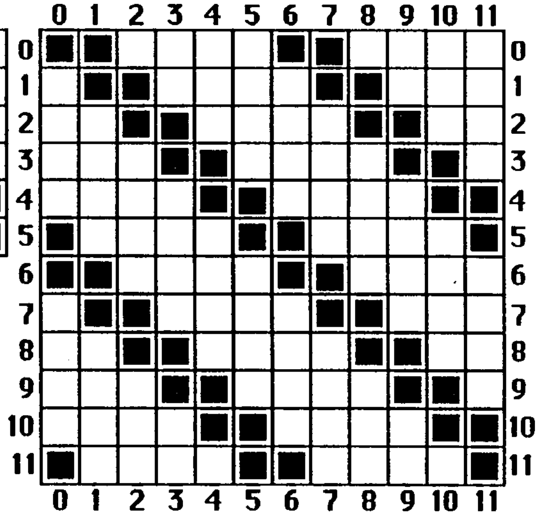
Esim.27 d: inst.matr. -1111211112-



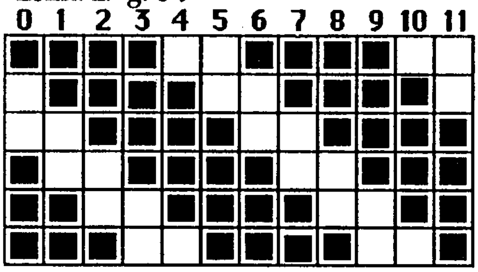
Esim.27 e: 4-9



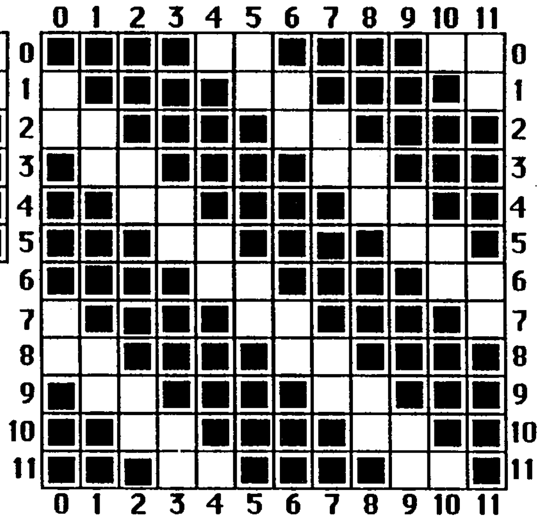
Esim.27 f: inst.matr. -1515-



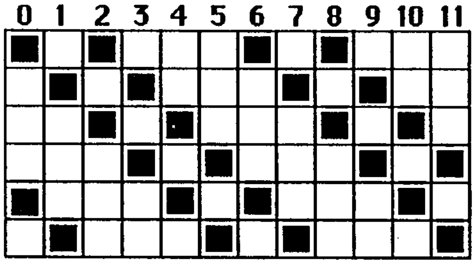
Esim. 27 g: 8-9



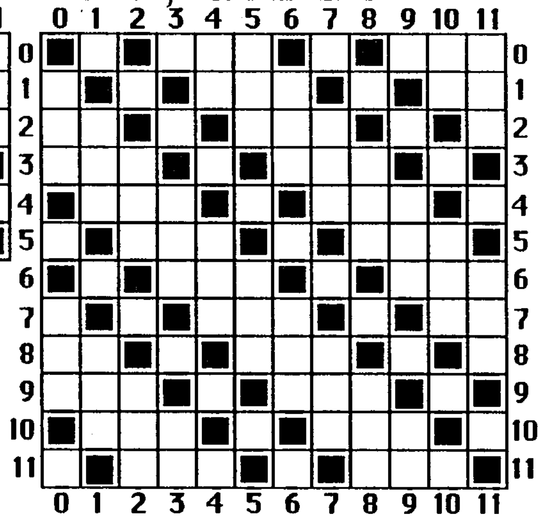
Esim.27 h: inst.matr. -11131113-



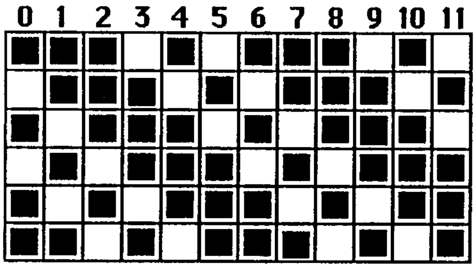
Esim.27 i: 4-25



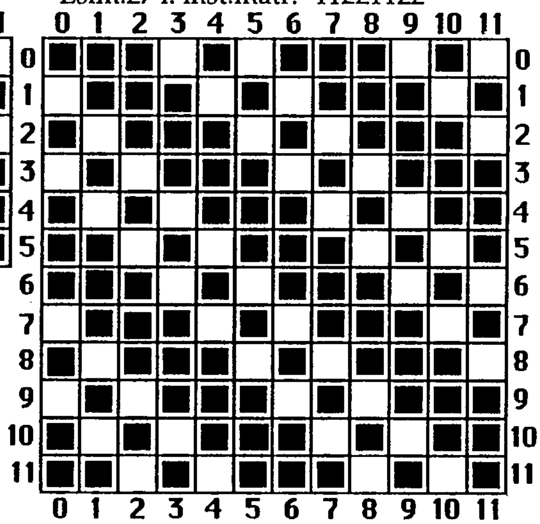
Esim.27 j: inst.matr. -2424-



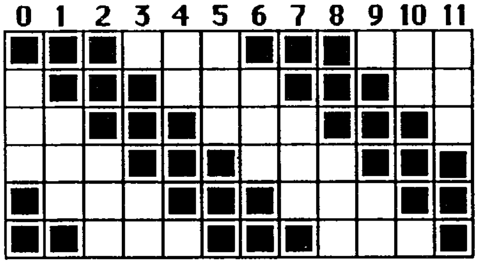
Esim. 27 k: 8-25



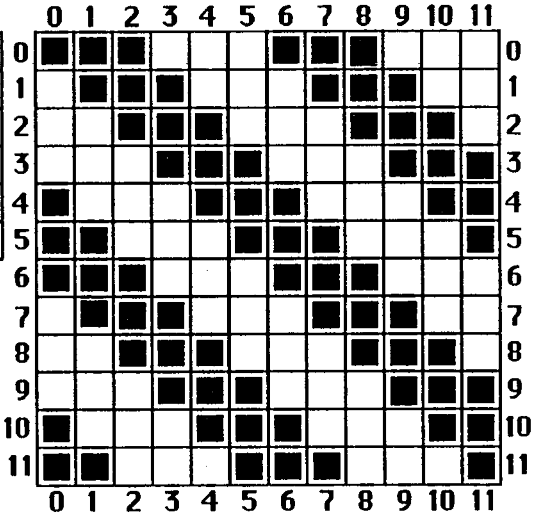
Esim.27 l: inst.matr. -11221122-



Esim.27 m: 6-7



Esim.27 n: inst.matr. -114114-



2-akselisesti symmetristen joukkoluokkien intervallikoiden kummankin jakson jäsenten numeroarvojen summa on kuusi. Akselit ovat aina 90° kulmassa toisiinsa nähden.

Esimerkki 28: 2-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-25 intervallikko on -2424-. Identtisen myötä- ja vastapäiväispermutaation tuottavia kohtia on neljä, eli intervallikon kaikki jäsenet. Akselien kiintopisteitä osoittavat kohdat osuvat intervallikon jäsenille. Täten yksikään akselien yhteensä neljästä kiintopisteestä ei ole joukon jäsen.
Komplementtijoukkoluokan 8-25 intervallikossa -11221122- akselien kiintopisteitä osoittavat kohdat osuvat vierekkäisten saman numeroarvon omaavien jäsenten väliin. Kummankin akselin molemmat kiintopisteet kuuluvat joukkoon.

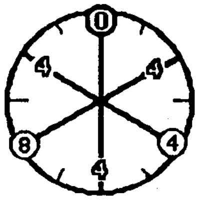
2.4.4.2. 3-akselisesti symmetriset joukkoluokat

3-akselisesti symmetristen joukkoluokkien määrä selvitetään samaan tapaan kuin 2-akselisten. Niitä on yhtä monta kuin kahdeksitoista summautuvia normaalijärjestyksisiä numerojonoja, jotka koostuvat kolmesta identtisestä jaksosta.
Kriteerit täyttävät tapaukset:

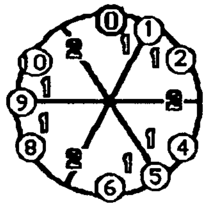
1) 4+4+4=12   2) 1+3+1+3+1+3=12   3) 1+1+2+1+1+2+1+1+2=12

Kolmiakselisesti symmetrisiä joukkoluokkia on näinollen kolme kappaletta. Yhteenlaskettavien määrää vastaavasti yksi on kolmejäseninen, yksi kuusijäseninen ja yksi yhdeksänjäseninen. Nämä kolme joukkoluokkaa ovat komplementtipari 3-12/9-12, intervallikoiltaan -444- ja -112112112-, (esim.29 a-b) sekä itsekomplementoiva heksakordi 6-20,jonka intervallikko on -131313-. (Esim.29 c). Joukkoluokan 3-12 jäsenjoukot ovat R-avaruudessa ylinousevia kolmisointuja.

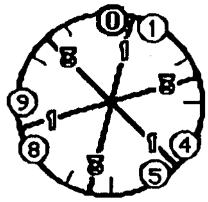
Esim.29 a



29 b



29 c



3-akselisesti symmetristen joukkoluokkien intervallikoissa on yhden jakson jäsenten numeroarvojen summa 12/3=4. Jäsenjoukkoja on myös neljä. Yhteensä 3-akselisesti symmetrisiä joukkoja on 3*4=12 kappaletta.

3-akselisesti symmetrisen rakenteen määrittämässä instanssiluokassa kukin sävelluokkasisältö on yhteinen kolmelle instanssille, jotka sijaitsevat aina neljän puolisävelluokka-askeleen päässä toisistaan. Sävelluokkaympyrällä olevassa 3-akselisesti symmetrisessä joukossa akselien välinen kulma on 60°.

Esimerkissä 30 a-f 3-akselisesti symmetristen joukkoluokkien jäsenjoukkomatriisit (vasemmalla), vierellään samat intervallikot omaavista rakenteista johdetut instanssimatriisit (oikealla).

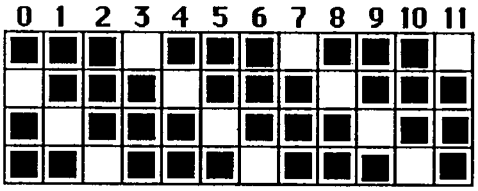
Esim. 30 a: 3-12

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
■				■				■			
	■				■				■		
		■				■				■	
			■				■				■

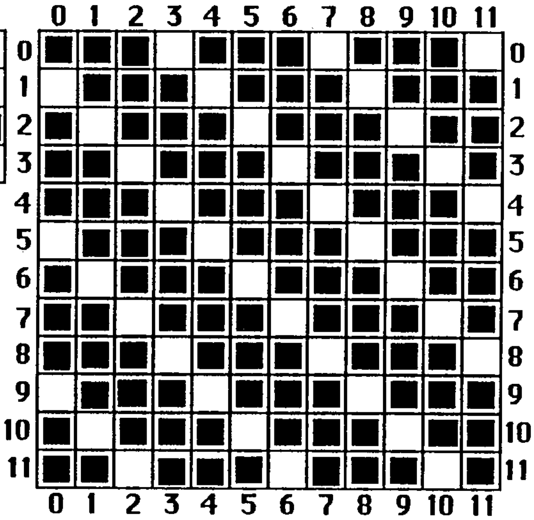
Esim. 30 b: inst.matr. -444-

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	■				■				■				0
1		■				■				■			1
2			■				■				■		2
3				■				■				■	3
4	■				■				■				4
5		■				■				■			5
6			■				■				■		6
7				■				■				■	7
8	■				■				■				8
9		■				■				■			9
10			■				■				■		10
11				■				■				■	11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

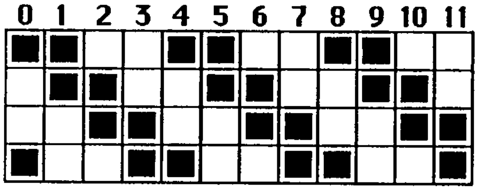
Esim. 30 c: 9-12



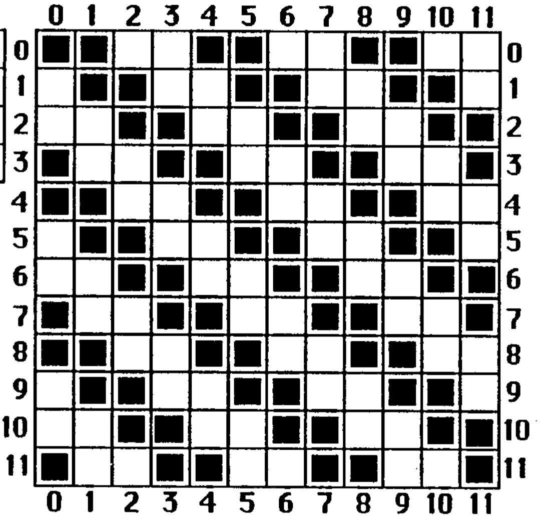
Esim. 30 d: inst.matr. -112112112-



Esim. 30 e: 6-20



Esim. 30 f: inst.matr. -131313-



2.4.4.3. 4-akselisesti symmetriset joukkoluokat

4-akselisesti symmetrisiä joukkoluokkia on yhtä monta kuin kahdeksitoista summautuvia normaalijärjestyksisiä numerojonoja, jotka koostuvat neljästä identtisestä jaksosta. Kriteerit täyttäviä tapauksia on kaksi.

1) 3+3+3+3=12 2) 1+2+1+2+1+2+1+2=12

Joukkoluokat muodostavat komplementtijoukkoluokkaparin 4-28/8-28, jonka intervallikot ovat -3333- ja -12121212-. Edellisen jäsenjoukot tunnetaan rekisteriavaruudessa vähennettyinä septimisointuina, jälkimmäisen kokopuoliasteikkoina. Esimerkissä 31 a-b joukkoluokkien primaarimuodot.

lempien kiintopisteidensä osalta, joka toinen ei kuulu joukkoon kummankaan kiintopisteensä osalta. Akselit ovat toisiinsa nähden 30° kulmassa.
Esimerkissä 33 a on joukkoluokan 6-35 primaarimuoto. (Edell. sivu). Esimerkissä 33 b-c joukkoluokan 6-35 jäsenjoukkomatriisi (vasemmalla), vierellään intervallikon -222222- omaavasta rakenteesta johdettu instanssimatriisi (oikealla).

Esim. 33 b: 6-35

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
■		■		■		■		■		■		0
	■		■		■		■		■		■	1

Esim. 33 c: inst.matr. -222222-

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	■		■		■		■		■		■		0
1		■		■		■		■		■		■	1
2	■		■		■		■		■		■		2
3		■		■		■		■		■		■	3
4	■		■		■		■		■		■		4
5		■		■		■		■		■		■	5
6	■		■		■		■		■		■		6
7		■		■		■		■		■		■	7
8	■		■		■		■		■		■		8
9		■		■		■		■		■		■	9
10	■		■		■		■		■		■		10
11		■		■		■		■		■		■	11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

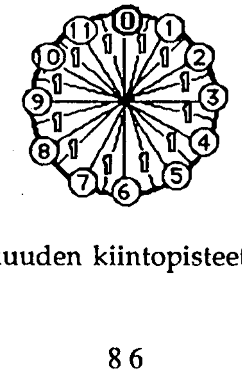
2.4.4.5. 12-akselisesti symmetriset joukkoluokat

On vain yksi mahdollisuus muodostaa summa kaksitoista siten, että intervalleja edustavien yhteenlaskettavien jono koostuu kahdestatoista identtisestä jaksosta:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 12$$

Tätä yhteenlaskettavien jonoa vastaava intervallikko -111111111111- kuuluu joukkoluokalle 12-1. Se on intervalliavaruuden ainoa 12-akselinen symmetria, jolla on intervallikko. Joukkoluokassa 12-1 on yksi jäsenjoukko, krooma. Joukko ja joukkoluokka ovat tässä tapauksessa yksi ja sama asia.

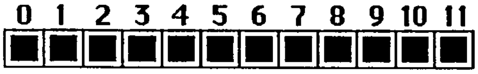
Esimerkki 34 a: krooma



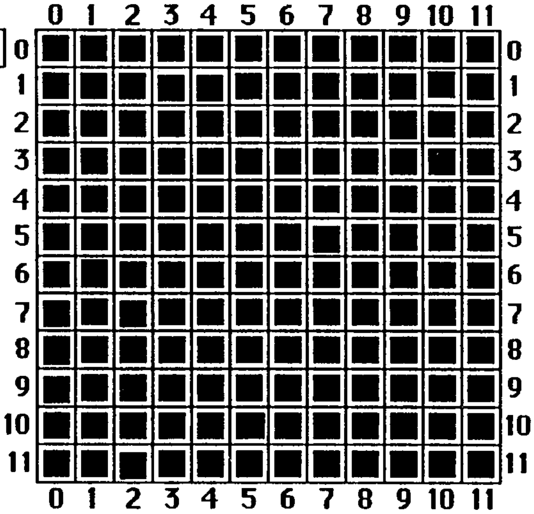
Kahdestatoista akselista kuuden kiintopisteet osuvat sävelluokille ja kuuden sävelluokkien väleihin. Akselien välinen kulma on 15°. Krooma on symmetrinen kaikkien sävelluokkien ja kaikkien sävelluokkien väleihin sijoittuvien neljäsosasävelluokkien, yhteensä 24 kiintopisteen suhteen.

Esimerkissä 34 b-c joukkoluokan 12-1 jäsenjoukkomatriisi (vasemmalla), vierellään intervallikon -111111111111- omaavasta rakenteesta johdettu instanssimatriisi (oikealla).

Esim.34 b: 12-1

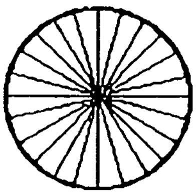


Esim. 34 c: inst.matr. -111111111111-

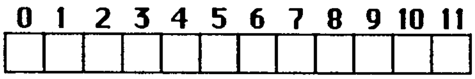


Joukkoluokan 12-1 komplementtijoukkoluokka 0-1 omaa periaatteessa samanlaiset symmetriaominaisuudet kuin 12-1. Sillä on vain yksi jäsenjoukko, tyhjä joukko, ja se on 12-akselinen. Tyhjään sävelluokkaympyrään voi sijoittaa akselin kaikille sävelluokille ja kaikkien sävelluokkien väleihin, ja ympäröivän tyhjän kehyksen puolikkaat suhtautuvat aina toisiinsa peilikuvamaisesti. Intervallikon jaksollisuusehtoa se ei kuitenkaan täytä, koska sillä ei ole intervallikkoa lainkaan. Ja koska olematonta intervallikkoa ei voi sijoittaa alkavaksi vuoroin kaikilta sävelluokilta, ei *tyhjällä rakenteella* ole instanssimatriisia.

Esimerkki 35 a: I-avaruudellinen tyhjä joukko



Esimerkki 35 b: joukkoluokan 0-1 jäsenjoukkomatriisi



3. OSAJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

3.1. YLEISTÄ

3.1.1. OSAJOUKKO- JA OSAJOUKKOLUOKKASUHTEEN TOTEAMINEN INTERVALLIKON AVULLA

Richard Chrisman esittää artikkeleissaan periaatteen intervallikoiden hyödyntämisestä osajoukkojen tutkimisessa.[1] Hän määrittelee tilanteen, jossa on joukko S, intervallikoltaan A, ja joukko T, intervallikoltaan B. #S < #T. Jos A on muodostettavissa B:stä laskemalla B:n *vierekkäisiä jäseniä yhteen*, on S tai jokin sen transpositioista T:n osajoukko.[2] Näkökulma on yksittäisistä joukoista lähtevä, mutta itse asiassa etualalle nousee S:stä johdettava joukkoluokka: "S ja sen transpositiot". Kahden nimenomaisen joukon välisen osajoukkosuhteen toteamiseenhan ei intervallikkoa tarvita, mahdollinen suhde näkyy suoraan sävelluokista. Jos taas toimenpiteen aikana toista joukoista transponoidaan, se ei ole (yleensä) enää sama joukko.

Tämän vuoksi on osajoukkosuhteiden yhteydessä parempi operoida sävelluokkasisällöillä ja käyttää Chrismanin kuvaamaa toimenpidettä *osajoukkoluokkasuhteen* määrittelemiseen. Oletetaan joukkoluokka S, jonka jäsenjoukkojen yhteinen intervallikko on A, ja joukkoluokka T, jonka jäsenjoukkojen yhteinen intervallikko on B. #S < #T. Jos A on muodostettavissa B:stä laskemalla B:n vierekkäisiä jäseniä yhteen, vallitsee S:n ja T:n välillä osajoukkoluokkasuhde. Tällöin *jokainen* S:n jäsenjoukko on *jonkin* T:n jäsenjoukon osajoukko, tai toisinpäin, jokaisella T:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan jokin S:n osajoukko.

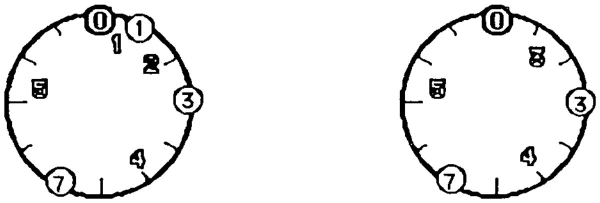
Osajoukkoluokkasuhteessa olevista kahdesta joukkoluokasta pienempi on *osajoukkoluokka* ja suurempi *ylijoukkoluokka*. Pienemmän joukkoluokan intervallikko on *ali-intervallikko*, suurempi *yli-intervallikko*. (Nimitys ali-intervallikko on parempi kuin "osaintervallikko", sillä jälkimmäinen saattaisi johtaa ajattelemaan "ei-kokonaista" intervallikkoa. Tällaisille lukumäärältään vajaille intervallikoille tulee myöhemmin käyttöä).

Osajoukkoluokkasuhteen ilmaisemista varten ei ole olemassa laajalti käytössä olevaa symbolia. Hyödynnän seuraavassa John Cloughin käyttämää.[3] Äskeisen tapauksen asetelmassa merkitään siten $S \sqsubset T$ (S on T:n osajoukkoluokka) tai $T \sqsupset S$ (T on S:n ylijoukkoluokka).

Jos osajoukkoluokkasuhde ei tiettyjen joukkoluokkien Z ja Q (#Z < #Q) välillä toteudu, merkitään vastaavasti $Z \not\sqsubset Q$ tai $Q \not\sqsupset Z$. Samaa merkintätapaa voidaan tulkinnanvaraisuuksitta soveltaa myös intervallikoihin. $A \sqsubset B$ tai $B \sqsupset A$, ja joukkoluokkien Z ja Q intervallikoiden C ja D tapauksissa $C \not\sqsubset D$ tai $D \not\sqsupset C$.

Esimerkki 1: joukkoluokan 4-Z29 A intervallikko on -1245- ja joukkoluokan 3-11 A intervallikko on -345-. Kun nelijäsenisen intervallikon kaksi ensimmäistä jäsentä lasketaan yhteen, saadaan intervallikko -(1+2)45- = -345-. Joukkoluokka 3-11 A on joukkoluokan 4-Z29 A osajoukkoluokka ja vastaavasti 4-Z29 A on joukkoluokan 3-11 A ylijoukkoluokka. 3-11 A:n intervallikko -345- on tämän osajoukkoluokkasuhteen ali-intervallikko ja 4-Z29 A:n intervallikko -1245- vastaavasti yli-intervallikko. Merkitään 3-11 A $\sqsubset$ 4-Z29 A (4-Z29 A $\sqsupset$ 3-11 A) ja -345- $\sqsubset$ -1245- (-1245- $\sqsupset$ -345-). Esimerkeissä 1a ja 1b joukkoluokkien primaarimuodot sävelluokkaympyrällä.

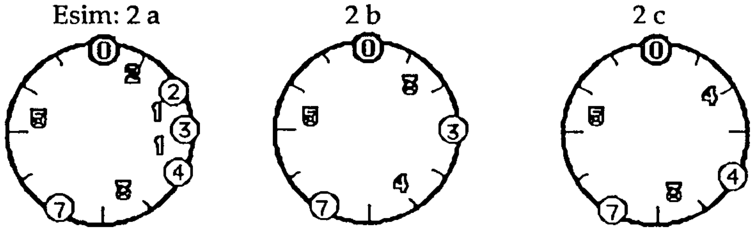
Esim. 1 a 1 b



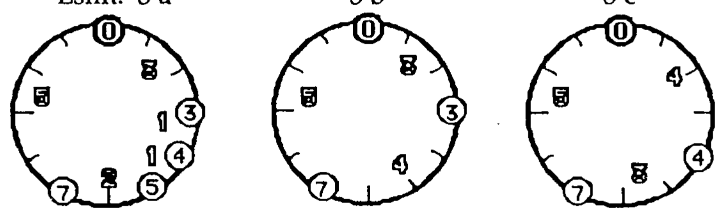
A/B-tyyppisen joukkoluokan osajoukkoluokkasuhteita voidaan tutkia myös samanaikaisesti.

Esimerkki 2: joukkoluokan 5-11 A intervallikko on -21135-. Joukkoluokan 3-11 A intervallikko on -345- ja joukkoluokan 3-11 B intervallikko on -435-. Intervallikosta -21135- voidaan muodostaa sekä -(2+1)(1+3)5- = -345- että -(2+1+1)35- = -435-. 3-11 A $\sqsubset$ 5-11 A ja 3-11 B $\sqsubset$ 5-11 A. -345- $\sqsubset$ -21135- ja -435- $\sqsubset$ -21135-. Esimerkeissä joukkoluokkien primaarimuodot.

Esim: 2 a 2 b 2 c



Esim: 3 a 3 b 3 c



Jos intervallikon -21135- tilalle oltaisiin valittu sen käänteisintervallikko, joukkoluokan 5-11 B intervallikko -31125-, olisi osajoukkoluokkasuhteiden toteutuminenkin tapahtunut periaatteessa käänteisesti, vaikka tässä nimenomaisessa tapauksessa se ei olisi muuttanut tuloksia näkyvästi, koska pienemmän A/B-tyyppisen joukkoluokan molemmat muodot toteuttivat osajoukkoluokkasuhteen yhtä monta kertaa, so.yhden kerran. Esimerkeissä 3 a-c joukkoluokkien primaarimuodot. (Edell. sivu).

Kaikissa A/B-tyyppisten joukkoluokkien tapauksissa pätee, että alijoukkoluokan A:n ja ylijoukkoluokan A:n keskinäinen osajoukkoluokkasuhde on täsmälleen samanlainen kuin alijoukkoluokan B:n ja ylijoukkoluokan B:n. Ja vastaavasti, alijoukkoluokan A:n ja ylijoukkoluokan B:n keskinäinen osajoukkoluokkasuhde on samanlainen kuin alijoukkoluokan B:n ja ylijoukkoluokan A:n.

Merkinnät $S \sqsubset T$ ja $T \sqsupset S$ ilmaisevat osajoukkoluokkasuhteen olemassaolon ylimalkaan. Joissakin tehtävänasetteluissa on kuitenkin hyödyllistä pitää käsillä tieto lisäksi myös siitä, onko kukin S:n jäsenjoukko mahdollisesti *useamman* T:n jäsenjoukon osajoukko, tai vastaavasti, onko kullakin T:n jäsenjoukolla mahdollisesti osajoukkonaan useampia S:n osajoukkoja.

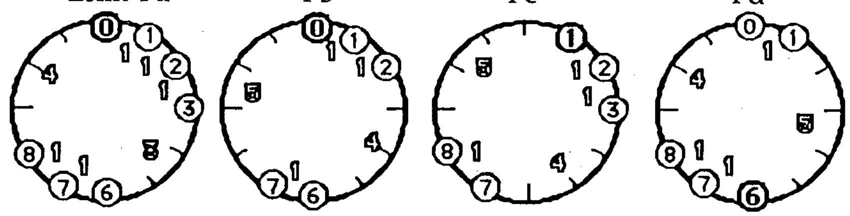
Tämä seikka selviää intervallikoiden avulla. Jos joukkoluokan S intervallikko A on muodostettavissa joukkoluokan T intervallikon B vierekkäisistä jäsenistä *useilla eri tavoilla,* on jokainen S:n jäsenjoukko usean T:n jäsenjoukon osajoukko. Tai yhtä hyvin, jokaisella T:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan useita S:n jäsenjoukkoja.

Esimerkki 4: Joukkoluokan 7-7 A intervallikko on -1113114-. A/B-tyyppisen joukkoluokan 5-7 intervallikot ovat -11415- (A) ja -14115- (B). 5-7 A toteuttaa osajoukkoluokkasuhteen kolme kertaa, sillä sen intervallikko on muodostettavissa 7-7 A:n intervallikosta vierekkäisiä jäseniä yhteenlaskemalla kolmesti (muistutettakoon jälleen, että intervallikon äärijäsenet ovat vierekkäisiä):

1) alkaen intervallikon -1113114- vasemmanpuoleisimmasta jäsenestä -11(1+3)1(1+4)- = -11415-
2) alkaen toisesta jäsenestä vasemmalla -11(3+1)1(4+1)- = -11415-
3) alkaen viidennestä jäsenestä vasemmalla -1141(1+1+3) = -11415-.

Esimerkissä 4 a joukkoluokan 7-7 A primaarimuoto. Esimerkeissä 4 b-d joukkoluokan 5-7 A jäsenjoukot, jotka toteuttavat osajoukkosuhteen sen kanssa.

Esim 4 a 4 b 4 c 4 d

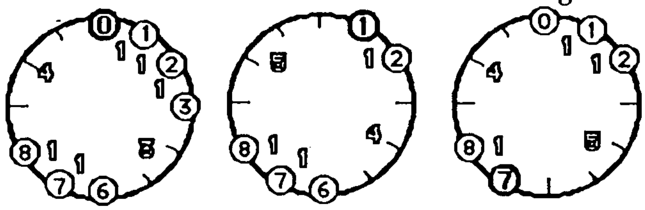


5-7 B puolestaan toteuttaa osajoukkoluokkasuhteen kahdesti:

1) alkaen intervallikon -1113114- toisesta jäsenestä vasemmalla: -1(1+3)11(4+1)- = -14115-
2) alkaen toisesta jäsenestä oikealla: -1411(1+3+1)- = -14115-.

Esimerkissä 4 e joukkoluokan 7-7 A primaarimuoto. Esimerkeissä 4 f-g joukkoluokan 5-7 B jäsenjoukot, jotka toteuttavat osajoukkosuhteen sen kanssa.

4e 4f 4g



Kuten edellisestä huomataan, ali-intervallikon suhteellinen sijainti yli-intervallikon sisällä selviää katsomalla, kuinka mones yli-intervallikon jäsen (numerojonoesityksessä vasemmalta oikealle ja ympyrällä myötäpäivään lukien) ali-intervallikon ensimmäinen jäsen on. Jos ali-intervallikko sijoittuu yli-intervallikon sisään alkaen esimerkiksi kolmannen jäsenen kohdalta, sijoittuu joukkotason tarkastelussa ali-intervallikon määrittämä pienempi joukko niinikään alkavaksi yli-intervallikon määrittämän suuremman joukon kolmannen jäsenen kohdalta.

Ali-intervallikon ensimmäisen jäsenen välimatka puolisävelluokka-askeleina yli-intervallikon alkuun selviää laskemalla yhteen yli-intervallikon alkupään jäsenten numeroarvot aina ali-intervallikon ensimmäiseen jäseneen saakka, jota ei itseään lasketa mukaan. Edellisessä esimerkissä 5-7 A:n intervallikon kolme esiintymää yli-intervallikossa sijoittuivat nollan, yhden ja kuuden puolisävelluokka-askeleen päähän yli-intervallikon normaalijärjestyksen alusta. 5-7 B:n intervallikon kaksi esiintymää yli-intervallikossa sijoittuivat puolestaan yhden ja seitsemän puolisävelluokka-askeleen päähän yli-intervallikon alusta.

Jos joukkoluokan S ja joukkoluokan T, #S < #T, välillä toteutuu osajoukkoluokkasuhde n kertaa, voidaan tämä haluttaessa merkitä osajoukkoluokkasuhdetta kuvaavaan symboliin liitettävän yläindeksin avulla: S $\sqsubset^{n}$ T (jokainen joukkoluokan S jäsenjoukoista on n:n joukkoluokan T jäsenjoukon osajoukko) tai vaihtoehtoisesti T $\sqsupset^{n}$ S (jokaisella joukkoluokan T jäsenjoukolla on osajoukkonaan n kappaletta joukkoluokan S jäsenjoukkoja).

Esimerkin 4 ensimmäisessä tapauksessa kirjoitetaan näinmuodoin 5-7 A $\sqsubset^{3}$ 7-7 A (jokainen 5-7 A:n jäsenjoukko on kolmen 7-7 A:n jäsenjoukon osajoukko) tai vaihtoehtoisesti 7-7 A $\sqsupset^{3}$ 5-7 A (jokaisella 7-7 A:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan kolme 5-7 A:n jäsenjoukkoa). Esimerkin 4 toisessa tapauksessa kirjoitetaan vastaavasti 5-7 B $\sqsubset^{2}$ 7-7 A (jokainen 5-7 B:n jäsenjoukko on kahden 7-7 A:n jäsenjoukon osajoukko) tai vaihtoehtoisesti 7-7 A $\sqsupset^{2}$ 5-7 B (jokaisella 7-7 A:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan kaksi 5-7 B:n jäsenjoukkoa).

Kaikissa niissä tapauksissa, joissa S ja T ovat 12-jäsenjoukkoisia joukkoluokkia (joko epäsymmetrisistä joukoista tai 1-akselisesti symmetrisistä joukoista johdettuja), pätee: jos S $\sqsubset^{n}$ T , niin T $\sqsupset^{n}$ S. Jos joukkoluokista S ja T toinen tai molemmat ovat kiertosymmetrisistä joukoista muodostettuja ja siten vähemmän kuin 12-jäsenjoukkoisia, usein $S \sqsubset^n T \neq T \sqsupset^n S$.

Esimerkiksi epäsymmetrisen joukkoluokan 3-11 A ja neliakselisesti kiertosymmetrisen joukkoluokan 8-28 välisistä osajoukkoluokkasuhteista voidaan todeta: 3-11 A $\sqsubset^1$ 8-28 (jokainen 3-11 A:n jäsenjoukko on *yhden* 8-28:n jäsenjoukon osajoukko), kun taas 8-28 $\sqsupset^4$ 3-11 A (jokaisella 8-28:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan *neljä* 3-11 A:n jäsenjoukkoa).

Osajoukkoluokkasuhteiden toteutumisten määrät saattavat siis tällaisisssa tapauksissa tehdä poikkeuksen käänteisyydestä. Sensijaan tapaukset, joissa $S \sqsubset T$ mutta $T \not\sqsupset S$, tai vaihtoehtoisesti $S \not\sqsubset T$ mutta $T \sqsupset S$ eivät ole mahdollisia. $S \sqsubset T = T \sqsupset S$ pätee kaikissa olosuhteissa.[4] Näitä kysymyksiä tarkastellaan enemmän kohdassa 3.: *Kiertosymmetristen joukkoluokkien osajoukkoluokkasuhteet.*

Seuraavassa tullaan tarpeen mukaan käyttämään kumpaakin merkintätapavaihtoehtoa, sekä $S \sqsubset T$ / $T \sqsupset S$ että $S \sqsubset^n T$ / $T \sqsupset^n S$.

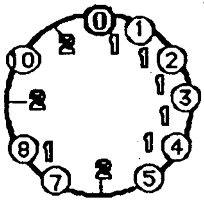
3.1.2. OPEROIMINEN VAJAILLA INTERVALLIKOILLA

Koska jokaisen intervallikon jäsenten summa on aina 12, voidaan useissa operaatioissa - huomattakoon: ei automaattisesti kaikissa - yksi jäsenistä haluttaessa jättää pois intervallikon menettämättä toimivuuttaan. Pois jätetty jäsen on kooltaan jäljelle jäävien jäsenten summa vähennettynä kahdestatoista. Joissakin operaatioissa, kuten osajoukkoluokkatarkasteluissa,ei yhden intervallikon jäsenen poisjättäminen lisää virhealttiutta, mutta nopeuttaa käsin suoritettavia tarkasteluita.

Osajoukkoluokkatarkasteluissa *ali-intervallikon* jäsenistä voidaan jättää pois mikä hyvänsä. Useimmiten on mielekkäintä jättää pois viimeinen, koska se on suurin tai jokin suurimmista. Tunnistamisen helpottamiseksi merkitään yhdellä jäsenellä supistetut intervallikot seuraavassa siten, että oikeanpuoleinen väliviiva jätetään pois.

Esimerkki 5: Joukkoluokan 9-7 A intervallikko on -111112122-. A/B -tyyppisen joukkoluokan 3-2 intervallikot ovat -129- (A) ja -219- (B). 3-2 A:n ja B:n intervallikoista käytetään vajaita muotoja -12 ja -21. Summattaessa intervallikon -111112122- rinnakkaisista jäsenistä intervallipareja 12 tai 21 on jäljellejäävien jäsenten summa aina automaattisesti 9.

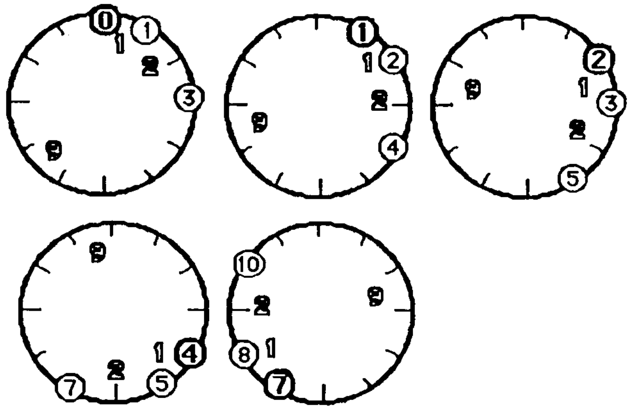
Esim.5 a: joukkoluokan 9-7 A primaarimuoto



9-7 A:n intervallikosta voidaan muodostaa 3-2 A:n vajaaintervallikko -12 viisi kertaa, alkaen yli-intervallikon 1., 2., 3., 5. ja 7. jäsenistä.

Esimerkeissä 5 b-f olevat viisi 3-2 A:n jäsenjoukkoa ovat 9-7 A:n primaarimuodon osajoukot. 9-7 A $\sqsupset^5$ 3-2 A. Koska molemmat joukkoluokat ovat epäsymmetrisistä joukoista johdettuja, myös 3-2 A $\sqsubset^5$ 9-7 A.

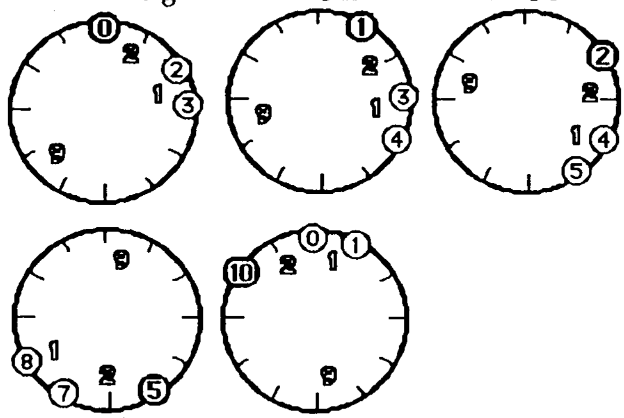
Esim.5 b 5 c 5 d



5 e 5 f

9-7 A:n intervallikosta voidaan muodostaa 3-2 B:n vajaaintervallikko -21 niinikään viisi kertaa, alkaen yli-intervallikon 1., 2., 3., 6. ja 9. jäsenistä. Esimerkeissä 5 g-k olevat viisi 3-2 B:n jäsenjoukkoa ovat 9-7 A:n primaarimuodon osajoukot. 9-7 A $\sqsupset^5$ 3-2 B / 3-2 B $\sqsubset^5$ 9-7 A.

Esim.5 g 5 h 5 i

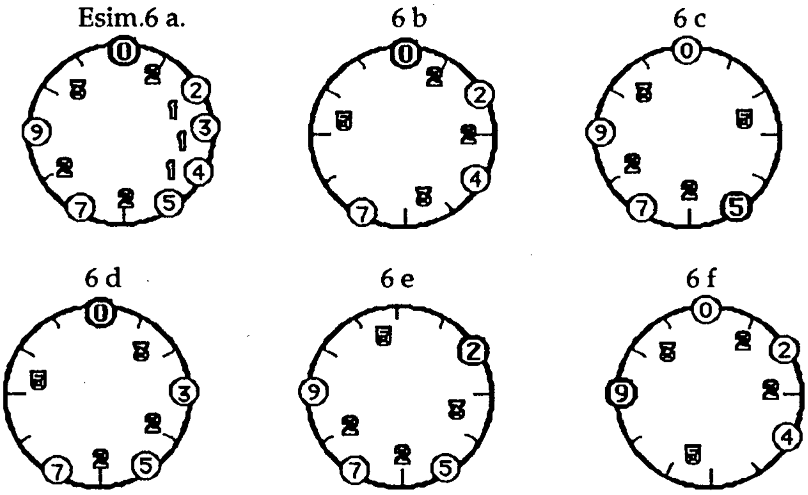


5 j 5 k

Esimerkki 6: joukkoluokan 7-23 A intervallikko on -2111223-. (Esim. 6 a: joukkoluokan 7-23 A primaarimuoto). A/B-tyyppisen joukkoluokan 4-22 intervallikot ovat -2235- (A) ja -3225- (B), yhdellä jäsenellä supistetussa muodossa -223 ja -322.

7-23 A:n intervallikosta voidaan muodostaa 4-22 A:n vajaaintervallikko -223 kaksi kertaa, alkaen yli-intervallikon 1. ja 5. jäseniltä. Esimerkeissä 6 b-c olevat kaksi 4-22 A:n jäsenjoukkoa ovat 7-23 A:n primaarimuodon osajoukot. 7-23 A $\sqsupset^2$ 4-22 A / 4-22 A $\sqsubset^2$ 7-23 A.

7-23 A:n intervallikosta voidaan muodostaa 4-22 B:n vajaaintervallikko -322 kolme kertaa, alkaen yli-intervallikon 1., 2. ja 7. jäseniltä. 7-23 A $\sqsupset^3$ 4-22 B / 4-22 B $\sqsubset^3$ 7-23 A. Esimerkeissä 6 d-f olevat kolme 4-22 B:n jäsenjoukkoa ovat 7-23 A:n primaarimuodon osajoukot.



3.1.3. OSAJOUKKO- JA OSAJOUKKOLUOKKASUHTEEN ERO

Kaikki joukon osajoukot ovat sävelluokkasisällöiltään erilaisia, mutta joukkoluokalla voi olla osajoukkoluokkasuhde samaan joukkoluokkaan useita kertoja. Tämän vuoksi joudutaan osajoukko- ja osajoukkoluokkasuhteista puhuttaessa toisinaan käyttämään erilaisia ilmaisuja. Voidaan esimerkiksi yksiselitteisesti todeta, että n-jäsenisillä joukoilla on m kappaletta k-jäsenisiä osajoukkoja. Sensijaan ei voida yksiselitteisesti todeta, että n-jäsenisillä joukkoluokilla on m kappaletta k-jäsenisiä osajoukkoluokkia, sillä niiden määrä vaihtelee tapauksesta riippuen. Osajoukkoluokkasuhteiden *toteutumisten* määrä on kuitenkin vakio, joten mahdollinen ilmaisu on esim. "n-jäseniset joukkoluokat toteuttavat m kappaletta osajoukkoluokkasuhteita k-jäsenisten joukkoluokkien kanssa".

3. 2. INTERVALLIKON AVULLA SUORITETTAVIA OPERAATIOITA

3. 2.1. n-JÄSENISEN JOUKKOLUOKAN n-1-JÄSENISTEN OSAJOUKKOLUOKKIEN ETSIMINEN

n-jäsenisellä joukolla on n kappaletta osajoukkoja, joiden kardinaalisuus n-1. 3-jäsenisellä on siten kolme 2-jäsenistä osajoukkoa, 4-jäsenisellä on 4 kolmijäsenistä osajoukkoa, 7-jäsenisellä on seitsemän 6-jäsenistä osajouk-

koa, 6-jäsenisellä on kuusi 5-jäsenistä osajoukkoa jne.[5]
Samantapainen suhde pätee myös n-jäseniseen joukkoluokkaan. Sen ja n-1 -jäsenisten joukkoluokkien välillä toteutuu osajoukkoluokkasuhde n kertaa. Seitsemänjäsenisen joukkoluokan ja kuusijäsenisten joukkoluokkien välillä toteutuu osajoukkoluokkasuhde 7 kertaa jne.
n-jäsenisestä joukosta etsitään kaikki n-1 -jäseniset osajoukot muodostamalla sen sävelluokista joukkoja, joista on vuoronperään jätetty yksi alkuperäisen joukon jäsenistä pois.

Esim 7: joukkoluokan 4-13 A primaarimuodon {0,1,3,6} 4 kolmijäsenistä osajoukkoa ovat {1,3,6}, {0,3,6}, {0,1,6} ja {0,1,3}.

Etsittäessä n-jäsenisen joukkoluokan n-1 -jäsenisiä osajoukkoluokkia toimitaan hieman toisin. n-jäsenisen intervallikon vierekkäiset jäsenet lasketaan vuoronperään pareittain yhteen siten, että jokainen jäsen tulee lasketuksi yhteen itseään edeltävän ja itseään seuraavan jäsenen kanssa. Kukin yhteenlaskun avulla syntynyt uusi intervalli muodostaa yhteenlaskun ulkopuolelle jääneiden muiden intervallien kanssa n-1 -jäsenisen intervallikon, joka on aina automaattisesti n-jäsenisen ali-intervallikko. Kaikkien täten muodostuneiden intervallikoiden joukko on yhtä kuin n-jäsenisen intervallikon kaikkien n-1 -jäsenisten ali-intervallikoiden joukko. Ali-intervallikoista puolestaan voidaan todeta n-jäsenisen joukkoluokan n-1 -jäseniset osajoukkoluokat.

Esim. 8: äskeisen esimerkkitapauksen, joukkoluokan 4-13 A intervallikko on -1236-. Sen kuvatunlaiset laskutoimitukset ovat

1) -12(3+6)- = -129-	2) -23(6+1)- = -237-
3) -36(1+2)- = -363-	4) -61(2+3)- = -615-.

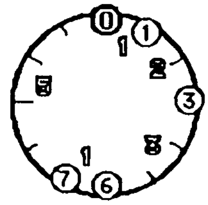
Toimenpidettä nopeuttavana havaintona voidaan panna merkille, että kussakin neljässä tapauksessa selviää muodostuva kolmijäseninen ali-intervallikko suoraan kahdesta yli-intervallikon "ei-yhteenlaskettavasta" jäsenestä. Yhteenlaskettavathan muodostavat keskenään ali-intervallikon yhden intervallin, ja edelläesitetyn perusteella tiedetään, että intervallikosta - myös ali-intervallikosta - voidaan jättää mikä tahansa intervalli pois sen menettämättä informatiivisyyttään. Poisjätetyn koko on joka tapauksessa mukaanotettujen summa vähennettynä kahdestatoista.
Yhteenlaskettavien poisjättäminen toimii yhtä hyvin kaikenkokoisten intervallikkojen kohdalla. Näinollen n-jäsenisen intervallikon n-1 -jäseniset ali-intervallikot selviävät kätevimmin tutkimalla intervallikon n-2 -jäseniset vierekkäisten intervallien muodostamat vajaaintervallikot. Niitä on aina n kappaletta.

Esim. 9: edellisessä tapauksessa tarvitsee siis vain poimia järjestyksessä yli-intervallikosta -1236- vajaaintervallikot -12 ,-23, -36 ja -61 ja katsoa 3-jäsenisten taulukosta joukkoluokkien nimet. -12(9)- on 3-2 A, -23(7)- on 3-7 A, -36(3)- on symmetrinen joukkoluokka 3-10 ja -61(5)- on joukkoluokka 3-5 A. Ne muodostavat yhdessä joukkoluokan 4-13 A kaikkien 3-jäsenisten osajoukkoluokkien joukon. Intervallikot -363- ja -615- eivät ole normaalimuodossa, mutta tämä ei vaikuta tulokseen.

Esimerkki 10: joukkoluokan 5-19 A intervallikko on -12315-. Sen nelijäsenisten ali-intervallikoiden ja edelleen joukkoluokan nelijäsenisten osajoukkoluokkien selvittämiseksi tutkitaan intervallikon kaikki rinnakkaisten jäsenten muodostamat 3 -jäseniset vajaaintervallikot: 1) -123 2) -231 3) -315 4) -151 5) -512.

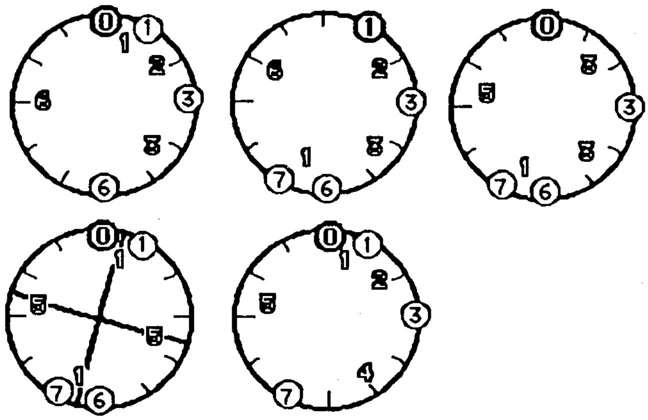
1) -123(6)- = joukkoluokan 4-13 A intervallikko (Esim.10 b)
2) -231(6)- = joukkoluokan 4-Z15 B intervallikko (Esim.10 c)
3) -315(3)- (norm.järj. -3315-) = joukkol. 4-18 B intervallikko (Esim.10 d)
4) -151(5)- = joukkoluokan 4-9 intervallikko (Esim.10 e)
5) -512(4)- (norm.järj. -1245-) = joukkol. 4-Z29 A intervallikko (Esim.10 f).

Esim.10 a joukkoluokan 5-19 A primaarimuoto



Esim. 10 b-f: osajoukkoluokkien jäsenjoukot, jotka ovat 5-19 A:n primaarimuodon osajoukkoja. Joukkoa {1,3,6,7} eli 4-Z15 B/1 eli -2316-/1 lukuunottamatta kaikki joukot ovat joukkoluokkiensa primaarimuotoja.

10 b 10 c 10 d



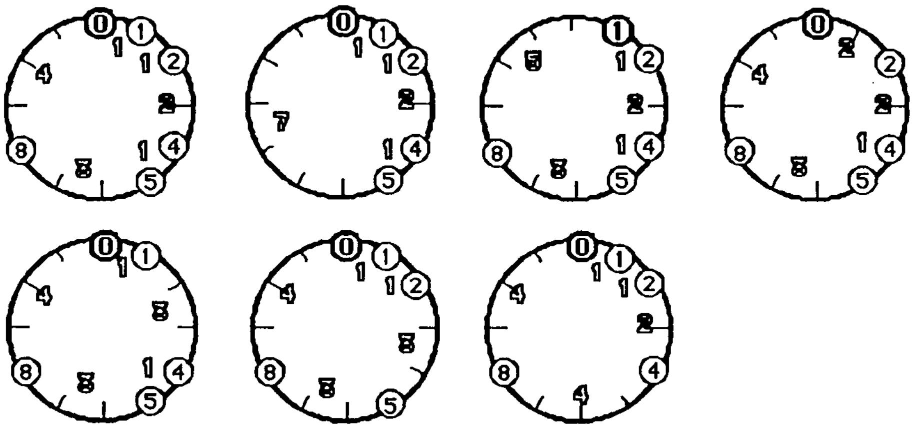
10 e 10 f

Esimerkki 11: joukkoluokan 6-15 A intervallikko on -112134-. Sen viisijäsenisten ali-intervallikkojen ja edelleen joukkoluokan viisijäsenisten osajoukkoluokkien selvittämiseksi etsitään intervallikon kaikki rinnakkaisten jäsenten muodostamat 4-jäseniset vajaaintervallikot: 1) -1121 2) -1213 3) -2134 4) -1341 5) -3411 ja 6) -4112.

1) -1121(7)- = joukkoluokan 5-3 A intervallikko (Esim.11 b)
2) -1213(5)- = joukkoluokan 5-16 A intervallikko (Esim.11 c)
3) -2134(2)- (norm.järj. -22134-) = joukkol. 5-26 A intervallikko (Esim.11 d)
4) -1341(3)- (norm.järj. -13134-) = joukkol. 5-21 A intervallikko (Esim.11 e)
5) -3411(3)- (norm.järj. -11334-) = joukkol. 5-Z38 A intervallikko (Esim.11 f)
6) -4112(4)- (norm.järj. -11244-) = joukkol. 5-13 A intervallikko (Esim.11 g).

Esimerkissä 11 a joukkoluokan 6-15 A primaarimuoto. Esimerkeissä 11 b-g osajoukkoluokkien jäsenjoukot, jotka ovat primaarimuodon osajoukot.

Esim.11 a 11 b 11 c 11 d



11 e 11 f 11 g

Joukkoa {1,2,4,5,8} eli 5-16 A/1 eli -12135-/1 lukuunottamatta kaikki joukot ovat jälleen joukkoluokkiensa primaarimuotoja.

3.2.2. n-JÄSENISEN JOUKKOLUOKAN n-2 -JÄSENISTEN JA SITÄ PIENEMPIEN OSAJOUKKOLUOKKIEN ETSIMINEN

Yleensä mitä suuremmaksi ylijoukkoluokan koon ja sen osajoukkoluokkien kokojen välinen erotus kasvaa, sitä monimutkaisempaa osajoukkoluokkasuhteiden selvittäminen on. Tietynkokoisia osajoukkoluokkia saattaa syntyä niin paljon, että niiden lähempi eritteleminen ei ole mielekästä. Esimerkiksi 10-jäsenisen joukkoluokan ja 5-jäsenisten joukkoluokkien välillä toteutuu osajoukkoluokkasuhde aina 252 kertaa, joten jonkin yksittäisen osajoukkoluokan esiintymiskerrat ovat paljouteen hukkuva tieto.

Useimmat vastaantulevat osajoukkoluokkatarkastelut pysyttelevät kuitenkin mielekkäissä rajoissa, joten on perusteltua pyrkiä löytämään mahdollisimman käyttökelpoinen metodi, jonka avulla voidaan selvittää ylijoukkoluokaksi valittavan joukkoluokan kaikki tietynkokoiset osajoukkoluokat.

n-jäsenisen joukon m-jäseniset osajoukot selviävät tutkimalla, kuinka monta erilaista m-jäsenistä sävelluokkakombinaatiota n-jäsenisestä on muodostettavissa. Esimerkiksi viisijäsenisen joukon {a,b,c,d,e} 3-jäsenisiä osajoukkoja muodostettaessa listataan kombinaatiot {a,b,c}, {a,b,d}, {a,b,e} jne., kunnes kaikki erilaiset osajoukkoja tuottavat vaihtoehdot on käyty läpi.

Näiden "abstraktisävelluokkien" tilalle voitaisiin sijoittaa minkä tahansa sisältöinen tai rakenteinen viisijäseninen joukko toimenpiteen siitä mitenkään muuttumatta. On siis yksinkertaisesti olemassa kaikkiin tapauksiin pätevä kaava tai malli 5-jäsenisen joukon 3-jäsenisten osajoukkojen, ja edelleen yleisemmin n-jäsenisten joukkojen m-jäsenisten osajoukkojen, selvittämiseksi.

Seuraavassa tarkoitukseni on esittää tapa, jolla vastaavanlaisia kaavoja tai malleja voidaan löytää myös osajoukkoluokkasuhteiden tutkimista varten. Välineinä ovat jälleen joukkoluokkien intervallikot.[6]

Ensiksi palataan vielä hetkeksi edellä jo esitettyyn n-jäsenisen intervallikon n-1 -jäsenisten ali-intervallikoiden muotoutumiseen. Äskeisen esimerkin joukossa {a,b,c,d,e} käytettyjen abstraktisävelluokkien tavoin voidaan intervallikon jäsenetkin korvata abstraktiintervallein. Viisijäseninen intervallikko kirjoitettaisiin tällöin - a b c d e -.

Tällaisen intervallikon nelijäsenisten ali-intervallikoiden muodostus tapahtuu, kuten edellä osoitettiin, laskemalla vierekkäiset jäsenet pareittain yhteen ja muodostamalla yhteenlaskun avulla syntyneestä intervallista muiden kanssa uusi intervallikko.

Esimerkki 12: viisijäsenisen intervallikon nelijäseniset ali-intervallikot:

1) - a b c (d+e) - 2) - b c d (e+a) - 3) - c d e (a+b)- 4) - d e a (b+c) -
5) - e a b (c+d) -

Kaikkien viiden ali-intervallikon synty noudattaa samaa kaavaa. Kaksi yksikköä lasketaan yhteen ja muut jätetään entiselleen. Se on ainoa tapa muodostaa viisijäsenisestä intervallikosta nelijäsenisiä ali-intervallikoita, sillä vain rinnakkaisia jäseniä lasketaan yhteen. Jos intervallikon yksiköitä merkitään ykkösillä, kirjoitetaan tämä ainoa jäsenten yhdistymisen malli 1 1 1 (1+1) eli 1 1 1 2 . Jäseniä on neljä ja niiden summa on 5. Intervallikon - a b c d e - nelijäsenisten ali-intervallikoiden voidaan tällöin ajatella syntyvän siten, että malli 1 1 1 2 sijoitetaan alkavaksi kultakin intervallikon jäseneltä, jolloin se vuoroin ohjaa juuri tietyn sävelluokkaparin yhdistymisen uudeksi ali-intervallikkoon tulevaksi intervalliksi.

Esimerkki 13: intervallikon - a b c d e - kolmejäseniset ali-intervallikot:
(Seur. sivu).

1) - a b (c+d+e) -	6) - a (b+c) (d+e) -
2) - b c (d+e+a) -	7) - b (c+d) (e+a) -
3) - c d (e+a+b) -	8) - c (d+e) (a+b) -
4) - d e (a+b+c) -	9) - d (e+a) (b+c) -
5) - e a (b+c+d) -	10) - e (a+b) (c+d) -

Intervallien yhdistymistä ohjaavia malleja ei tällä kertaa olekaan yksi, vaan kaksi. Vasemman sarakkeen viidessä tapauksessa kaksi jäsentä on jäänyt entiselleen ja kolme vierekkäistä laskettu yhteen. Oikean sarakkeen viidessä tapauksessa taas on yksi jäsen jäänyt entiselleen ja neljä seuraavaa laskettu pareittain yhteen. Nämä ovat ainoat tavat muodostaa viisijäsenisestä intervallikosta kolmejäsenisiä ali-intervallikoita.

Jos intervallikon yksiköitä merkitään jälleen ykkösillä, ensimmäinen malleista kirjoitetaan 1 1 (1+1+1) = 1 1 3 ja toinen 1 (1+1)(1+1) = 1 2 2. Molemmissa tapauksissa jäseniä on kolme ja summa on viisi. Edellisen tapauksen tavoin voidaan ajatella, että 1 1 3 ja 1 2 2 sijoitetaan alkaviksi vuoroin intervallikon - a b c d e - kultakin jäseneltä, jolloin ne ohjaavat jäsenten yhdistymistä ali-intervallikoiden uusiksi jäseniksi.

Esimerkki 14: seitsemänjäsenisen intervallikon - a b c d e f g - viisijäseniset ali-intervallikot: (intervallikkojen päissä olevat viivat jätetty pois)

1) a b c d (e+f+g)	8) a b c (d+e) (f+g)	15) a b (c+d) e (f+g)
2) b c d e (f+g+a)	9) b c d (e+f) (g+a)	16) b c (d+e) f (g+a)
3) c d e f (g+a+b)	10) c d e (f+g) (a+b)	17) c d (e+f) g (a+b)
4) d e f g (a+b+c)	11) d e f (g+a) (b+c)	18) d e (f+g) a (b+c)
5) e f g a (b+c+d)	12) e f g (a+b) (c+d)	19) e f (g+a) b (c+d)
6) f g a b (c+d+e)	13) f g a (b+c) (d+e)	20) f g (a+b) c (d+e)
7) g a b c (d+e+f)	14) g a b (c+d) (e+f)	21) g a (b+c) d (e+f)

Erilaisia intervallien yhdistymisen malleja on 21:n tapauksen keskuudessa kolme. Vasemmanpuoleisen sarakkeen seitsemässä tapauksessa neljä jäsentä on jäänyt ennalleen ja kolme seuraavaa laskettu yhteen. Keskimmäisen sarakkeen seitsemässä tapauksessa kolme jäsentä on jäänyt ennalleen ja seuraavat neljä laskettu pareittain yhteen. Oikeanpuoleisessa sarakkeessa kaksi jäsentä on jäänyt ennalleen, kaksi seuraavaa laskettu yhteen, yksi jäänyt ennalleen ja jälleen kaksi seuraavaa laskettu yhteen.

Merkittäessä intervallikon yksiköitä ykkösillä kirjoitetaan ensimmäinen malli muotoon 1 1 1 1 (1+1+1) = 1 1 1 1 3, toinen 1 1 1 (1+1) (1+1) = 1 1 1 2 2 ja kolmas 1 1 (1+1) 1 (1+1) = 1 1 2 1 2. Kaikissa on viisi jäsentä ja summa on 7. Esimerkeissä 12 ja 13 olleiden tapausten tavoin voidaan ali-intervallikot mieltää syntyneiksi siten, että mallit on sijoitettu alkaviksi intervallikon - a b c d e f g - kultakin jäseneltä, jolloin ne ovat ohjanneet intervallikon jäsenten yhdistymisiä ali-intervallikkojen uusiksi intervalleiksi.

Esimerkeissä 12-14 ovat ykkösistä summatut mallit olleet jäsenmäärältään haluttujen ali-intervallikkojen kokoisia ja jäseniensä numeroarvojen summalta yli-intervallikon jäsenmäärää vastaavia. Tämä seikka pätee kaikkiin mahdollisiin tapauksiin ja sitä voidaan käyttää hyväksi: haluttaessa n-jäsenisen intervallikon m-jäseniset ali-intervallikot tarvitsee vain tutkia, mitkä erilaiset m-jäseniset numerojonot - mallit - ovat summaltaan n. Tämän jälkeen löydetyillä m-jäsenisillä malleilla ohjataan intervallikon rinnakkaisten jäsenten yhdistymistä ali-intervallikojen uusiksi intervalleiksi.

Esimerkki 15: tehtävänä on selvittää 7-jäsenisen intervallikon nelijäseniset ali-intervallikot. Tällöin etsitään nelijäseniset numerojonot, joiden jäsenten summa on seitsemän:

1) 1 1 1 4   2) 1 1 2 3   3) 1 2 1 3   4) 2 1 1 3   5) 1 2 2 2

Nämä viisi eivät ole kaikki mahdolliset seitsemäksi summautuvat nelijäseniset numerojonot, sillä tämän ehdon täyttävät tahoillaan myös esimerkiksi jonot 1 4 1 1, 2 3 1 1, 3 1 2 1, 1 3 2 1 jne. Niitä ei kuitenkaan lasketa mukaan, sillä ne ovat ylläolevien mallien *syklisiä permutaatioita* : 1 4 1 1 = 1 1 1 4, 2 3 1 1 = 1 1 2 3, 3 1 2 1 = 1 2 1 3 jne. Jokainen niistä tulee joka tapauksessa sovelletuksi, kun mukaan hyväksytty malli sijoitetaan alkavaksi jokaiselta 7-jäsenisen intervallikon jäseneltä. Tämän vuoksi yksi muoto kustakin "mallityypistä" riittää. Mukaan otettavat muodot ovat siis yksinkertaisesti mallien syklisten permutaatioiden *normaalijärjestyksiä*, jotka selviävät aiemmin annettujen kriteerien avulla. Löydetyt viisi normaalijärjestyksistä mallia sijoitetaan alkaviksi 7-jäsenisen intervallikon jäseniltä, jolloin ne tuottavat sen kaikki 5*7 = 35 nelijäsenistä ali-intervallikkoa. Näistä puolestaan voi nähdä kaikki 4-jäseniset osajoukkoluokat sille 7-jäseniselle joukkoluokalle, jonka intervallikkoa kulloinkin tutkitaan.

Pääsääntöisesti jokaisen n-jäsenisen intervallikon m-jäsenisiä ali-intervallikoita on määrä, joka vastaa m-jäsenisten mallien määrän ja n:n tuloa. Eräät *jaksolliset mallit* aiheuttavat tiettyjä poikkeamia säännöstä. Tätä seikkaa tarkastellaan tuonnempana lisää.

Intervallien yhdistymistä ohjaavilla malleilla on sama työtä nopeuttava piirre kuin intervallikoilla: niistä voi jättää yhden jäsenen pois. Seuraavissa esimerkeissä on toimittu näin.

Esimerkki 16: viisijäsenisen joukkoluokan 5-28 A intervallikko on -21324-. Tehtävänä on selvittää sen kolmejäseniset ali-intervallikot. Tällaisissa tapauksissa intervallikon jäsenten yhdistymistä ohjaavia malleja on kaksi kappaletta. (Ks.esim. 13). 1) kaksi jäsentä jää entiselleen ja kolme vierekkäistä lasketaan yhteen. 2) yksi jäsen jää entiselleen ja neljä seuraavaa lasketaan pareittain yhteen. Toisin kirjoitettuna 1 1 3 ja 1 2 2. Kummastakin voi toimenpidettä suoritettaessa jättää yhden jäsenen pois, joten mallit ovat 1 1 ja 1 2. Intervallikon -21324- tapauksessa malli 1 1 tuottaa seuraavat vajaaintervallikot:

1) -21   2) -13   3) -32   4) -24   5) -42.

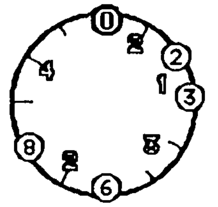
Malli 1 2 puolestaan tuottaa vajaaintervallikot

6) -2(1+3) = -24 7) -1(3+2) = -15 8) -3(2+4) = -36 9) -2(4+2) = -26
10) -4(2+1) = -43.

ali-intervallikot ja niiden osoittamat osajoukkoluokat koottuina:

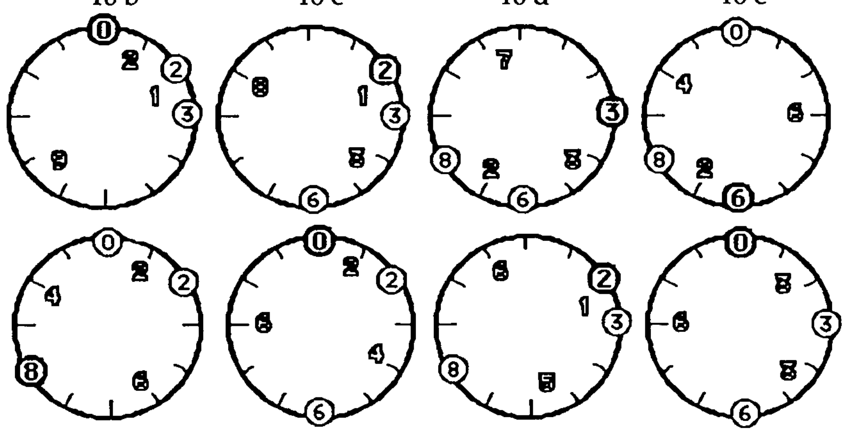
1) -21(9)- = 3-2 B (Esim.16 b)
2) -13(8)- = 3-3 A (Esim.16 c)
3) -32(7)- = 3-7 B (Esim.16 d)
4) -24(6)- = 3-8 A (Esim.16 e)
5) -42(6)- = 3-8 B (Esim.16 f)
6) -24(6)- = 3-8 A (Esim.16 g)
7) -15(6)- = 3-5 A (Esim.16 h)
8) -36(3)- (norm.järj. -336-) = 3-10 (Esim.16 i)
9) -26(4)- (norm.järj. -426-) = 3-8 B (Esim.16 j)
10) -43(5)- = 3-11 B (Esim.16 k)

Esim.16 a: joukkoluokan 5-28 A primaarimuoto



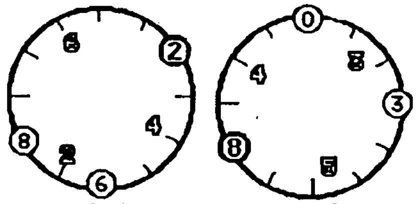
Esim. 16 b-k: joukkoluokan 5-28 A primaarimuodon kolmejäseniset osajoukot

16 b 16 c 16 d 16 e



16 f 16 g 16 h 16 i

(kohdat 16 j-k seur. sivulla)



16 j 16 k

Esimerkki 17: Joukkoluokan 7-21 A intervallikosta -1121313- etsitään viisijäseniset ali-intervallikot. Intervallien yhdistymistä ohjaavia malleja on kolme: 1 1 1 1 3, 1 1 1 2 2 ja 1 1 2 1 2. (Ks.esim. 14). Viimeiset jäsenet voidaan jättää pois, jolloin muodot ovat 1 1 1 1, 1 1 1 2 ja 1 1 2 1.

1 1 1 1-tapaukset:

1) -1121 2) -1213 3) -2131
4) -1313 5) -3131 6) -1311 7) -3112

1 1 1 2-tapaukset:

8) -112(1+3) = -1124 9) -121(3+1) = -1214 10) -213(1+3) = -2134
11) -131(3+1) = -1314 12) -313(1+1) = -3132 13) -131(1+2) = -1313
14) -311(2+1) = -3113

1 1 2 1-tapaukset:

15) -11(2+1)3 = -1133 16) -12(1+3)1 = -1241 17) -21(3+1)3 = -2143
18) -13(1+3)1 = -1341 19) -31(3+1)1 = -3141 20) -13(1+1)2 = -1322
21) -31(1+2)1 = -3131

Joukkoluokan 7-21 A 5-jäseniset osajoukkoluokat ovat: (suluissa tarvittaessa normaalijärjestys)

1) -1121(7)- = 5-3 A
2) -1213(5)- = 5-16 A
3) -2131(5)- = 5-Z18 B
4) -1313(4)- = 5-21 A
5) -3131(4)- = 5-21 B
6) -1311(6)- = 5-6 B
7) -3112(5)- = 5-11 B
8) -1124(4)- = 5-13 A
9) -1214(4)- = 5-Z17
10) -2134(2)- (-22134-) = 5-26 A
11) -1314(3)- (-31314-) = 5-21 B
12) -3132(3)- (-13233-) = 5-32 A
13) -1313(4)- = 5-21 A
14) -3113(4)- = 5-Z37
15) -1133(4)- = 5-Z38 A
16) -1241(4)- = 5-20 A
17) -2143(2)- (-32214-) = 5-27 B
18) -1341(3)- (-13134-) = 5-21 A
19) -3141(3)- (-13314-) = 5-22
20) -1322(4)- = 5-30 A
21) -3131(4)- = 5-21 B

n-jäseninen joukkoluokka toteuttaa saman määrän osajoukkoluokkasuhteita sekä m-jäsenisten joukkoluokkien että k-jäsenisten joukkoluokkien välillä kaikissa niissä tapauksissa, joissa m+k=n. Toisin sanoen m ja k ovat toistensa komplementit n:n suhteen.

Esimerkki 18: jos n=9, ovat sen suhteen kooltaan komplementtisia 1- ja 8-jäseniset, 2- ja 7-jäseniset, 3- ja 6-jäseniset ja 4- ja 5- jäseniset joukkoluokat. Kunkin parin kardinaalisuuksien piiriin kuuluvat joukkoluokat toteuttavat yhtä monta osajoukkoluokkasuhdetta 9:n kanssa: 1- ja 8-jäseniset 9 kpl, 2- ja 7-jäseniset 36 kpl, 3- ja 6-jäseniset 84 kpl ja 4- ja 5- jäseniset 126 kpl.

Esimerkki 19: jos taas n=7, toteuttaa se yhtä monta osajoukkoluokkasuhdetta 1- ja 6-jäsenisten (7 kpl), 2- ja 5- jäsenisten (21 kpl) ja 3- ja 4-jäsenisten (35 kpl) joukkoluokkien kanssa.[7] Jos m+k=n, muodostuu n-jäsenisen intervallikon m- ja k-jäsenisiä ali-intervallikoita selvitettäessä m:lle ja k:lle aina yhtä monta intervallien yhdistymistä ohjaavaa mallia.

Esimerkki 20: 7-jäsenisen intervallikon 35 nelijäsenistä ja 35 kolmejäsenistä ali-intervallikkoa muodostuvat seuraavista malleista: (haluttaessa pois jätettävä suurin intervalli suluissa)

nelijäseniset	kolmejäseniset
111(4)	11(5)
112(3)	12(4)
121(3)	21(4)
211(3)	13(3)
122(2)	23(3)

Esimerkki 21: 8-jäsenisellä intervallikolla puolestaan on 28 kaksijäsenistä ja 28 kuusijäsenistä ali-intervallikkoa. Intervallien yhdistymistä ohjaavia malleja on molemmilla neljä:

kuusijäseniset	kaksijäseniset
11111(3)	1(7)
11112(2)	2(6)
11121(2)	3(5)
11211(2)	4(4)

Sijoitettaessa neljä mallia vuorollaan alkavaksi kahdeksanjäsenisen intervallikon kultakin jäseneltä on syntyvien tapausten määrä 4*8 =32. Ali-intervallikoiden todellisen määrän, 28, ja kertolaskun tarjoaman tuloksen, 32, välillä ei vallitse yksimielisyys.

Selitys on yksinkertainen, ja se selviää katsomalla alimpia malleja, 112112 ja 44. Ne ovat jaksollisia, koostuen kumpikin kahdesta keskenään identtisestä osasta. Kunkin osan jäsenten keskinäinen summa on 4. Kun ne sijoitetaan alkavaksi vuoroin intervallikon jokaiselta jäseneltä, ne muista malleista poiketen tuottavat *samat intervallikon jäsenkombinaatiot kaksi kertaa*. Tämä voidaan nähdä tutkimalla allaolevaa 8-jäsenistä intervallikkoa - a b c d e f g h -. Kun sen jäsentymistä kaksijäsenisiksi ali-intervallikoiksi ohjataan mallilla 44, saadaan: (seur. sivu)

1) - (a+b+c+d) (e+f+g+h) -	5) - (e+f+g+h) (a+b+c+d) -
2) - (b+c+d+e) (f+g+h+a) -	6) - (f+g+h+a) (b+c+d+e) -
3) - (c+d+e+f) (g+h+a+b) -	7) - (g+h+a+b) (c+d+e+f) -
4) - (d+e+f+g) (h+a+b+c) -	8) - (h+a+b+c) (d+e+f+g) -

Erilaisia jäsenkombinaatioita on vain neljä, numeroille 1-4 löytyy vastine numeroista 5-8. Intervallien eri järjestys ei vaikuta asiaan. Jaksollinen malli aiheuttaa aina joidenkin intervallikon jäsenistä muodostuvien kombinaatioiden "yliedustuksen", sillä *erilaisia* kombinaatioita se tuottaa vain määrän joka vastaa *yhden jakson jäsenten summaa.* Näinollen intervallikon jäsenten yhdistymistä jaksollisella mallilla ohjattaessa tulee mallia sijoittaa alkavaksi vain yhden jakson jäsenten summaa vastaavalta määrältä intervallikon vierekkäisiä jäseniä. Tällöin syntyvät ali-intervallikot muodostuvat kaikki intervallikon eri jäsenkombinaatioista. Jaksollinen malli ei siis muista poiketen kasvata ali-intervallikoiden määrää intervallikon kardinaalisuutta vastaavalla määrällä, vaan yhden jakson jäsenten numeroarvojen summaa vastaavalla määrällä.

Äskeisessä tapauksessa jakson jäsenten summat olivat 1+1+2=4 ja 4. Näinollen ne kasvattavat ali-intervallikkojen määrää neljällä, muiden kasvattaessa kahdeksalla. Lopullinen laskutoimitus oikean ali-intervallikkojen määrän selvittämiseksi on (3*8)+4=28.

Ainoastaan jakson jäsenten numeroarvojen summaa vastaavalle määrälle intervallikon jäseniä sijoittuessaan jaksollinen malli lyhentää suoritettavaa toimenpidettä. Jaksollisuuden havaitseminen sinänsä on yksinkertaista, yhden jakson jäsenten numeroarvojen summaaminen sa-moin. Intervallikon koon suhteen komplementtiset ali-intervallikot - kuten 2- ja 6-jäseniset 8-jäsenisen suhteen - sisältävät aina yhtä monta jaksollista mallia.

Esimerkki 22: Kahdeksanjäsenisellä intervallikolla on 70 nelijäsenistä ali-intervallikkoa. Intervallien yhdistymistä ohjaavat mallit ovat:

1) 111(5)	2) 112(4)	3) 121(4)	4) 211(4)	5) 113(3)
6) 131(3)	7) 122(3)	8) 212(3)	9) 221(3)	10) 222(2)

Jaksollisia malleja on kaksi, 1313 ja 2222. Edellisessä yhden jakson jäsenten numeroarvojen summa on 4, jälkimmäisen kaksi. 1313 kasvattaa 8-jäsenisen intervallikon ali-intervallikkojen määrää neljällä, 2222 kahdella. Kun muut kahdeksan mallia kasvattavat kahdeksalla kukin, saadaan ali-intervallikoiden kokonaismäärä laskutoimituksesta (8*8)+4+2=70.

3.2.3. INTERVALLIKON KAIKKIEN ALI-INTERVALLIKOIDEN ETSIMINEN

n-jäsenisen intervallikon kaikki ali-intervallikot - ja tätä kautta n-jäsenisen joukkoluokan kaikki osajoukkoluokat - ovat selvitettävissä ohjaamalla intervallikon jäsenten yhdistymistä ali-intervallikoiksi kaikilla n-1 -jäsenisillä ja sitä pienemmillä malleilla. Mahdollisesti löytyvien jaksollisten mallien vaikutus tulee huomioida, samoin 1-jäsenisen intervallikon -12-, joka on n-jäsenisen intervallikon ali-intervallikko aina n kertaa.

Esimerkki 23: 4-,5- ja 6-jäsenisten intervallikoiden kaikki ali-intervallikot selviävät seuraavien mallien avulla:

4-jäseniset	5-jäseniset	6-jäseniset
112	1112	11112
13	113	1113
22	122	1122
4	14	1212
	23	114
	5	123
		213
		222
		15
		24
		33
		6

4-jäsenisten intervallikoiden tapauksissa tuottavat mallit 112, 13 ja 1-jäseniseen intervallikkoon viittaava 4 neljä ali-intervallikkoa kukin, jaksollinen malli 22 kaksi kpl.Ali-intervallikoita on (3*4)+2= 14 eli (2^4) -2 kpl.

5-jäsenisten intervallikoiden tapauksissa tuottavat kaikki mallit, 1112, 113, 122, 14, 23 ja 1-jäseniseen viittaava 5, viisi ali-intervallikkoa kukin. Yhteensä ali-intervallikoita on 6*5=30 eli (2^5)-2 kpl.

6-jäsenisten intervallikoiden tapauksissa tuottavat mallit 11112, 1113, 1122, 114, 123, 213, 15, 24 ja 1-jäseniseen viittaava 6 kuusi ali-intervallikkoa kukin, jaksolliset mallit 1212 ja 33 kolme kpl kumpikin ja jaksollinen malli 222 kaksi ali-intervallikkoa.

Ali-intervallikoita on yhteensä (9*6)+(2*3)+2= 62 eli (2^6)-2 kpl.[8]

3. 2.4. INTERVALLIKON KAIKKIEN YLI-INTERVALLIKOIDEN ETSIMINEN

Osajoukkoluokkasuhteen määrittelyn yhteydessä todettiin, että intervallikko on jonkin enemmän jäseniä sisältävän ali-intervallikko, jos se on muodostettavissa suuremmasta laskemalla tämän rinnakkaisia jäseniä yhteen. Enemmän jäseniä sisältävän intervallikon pieniä intervalleja lasketaan yhteen jotta niista saataisiin vähemmän jäseniä sisältävän intervallikon suurempia intervalleja.

Yhtä hyvin voidaan ajatella toisin päin. Jonkin intervallikon suuret intervallit voivat jakaantua useiksi pieniksi. Uusi intervallikko on automaattisesti alkuperäisen yli-intervallikko. Mielivaltaisessa intervallikossa oleva kakkosta suurempi intervalli voi jakautua pieniksi intervalleiksi useilla eri tavoilla, kakkonen kerran kahdeksi ykköseksi.

Esimerkiksi jossakin intervallikossa oleva intervalli kolme voi aina jakautua intervalliryhmiksi 111, 12 tai 21. Mikäli intervallikon muut jäsenet pysyvät muuttumattomina, tuottavat nämä kolmosen *partitiot* intervallikolle kolme erilaista yli-intervallikkoa. Syntyvät yli-intervallikot kuuluvat luonnollisesti aina olemassaoleville joukkoluokille, joiden nimet löytyvät tarvittaessa taulukosta.

Mielivaltaisessa intervallikossa oleva intervalli neljä voi puolestaan aina jakautua intervallikuluiksi 1111, 112, 121, 211, 13, 31 ja 22. Mikäli intervallikon muut jäsenet pysyvät muuttumattomina, tuottavat nelosen partitiot intervallikolle yhteensä seitsemän erilaista yli-intervallikkoa.

Mielivaltaisessa intervallikossa oleva intervalli viisi voi jakautua intervallikuluiksi 11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 113, 131, 311, 122, 212, 221, 14, 41, 23 ja 32. Intervallikon muiden jäsenten pysyessä muuttumattomina tuottavat viitosen partitiot intervallikolle 15 yli-intervallikkoa.

Yleisesti intervallin n partitiot tuottavat intervallikolle $(2^{n-1})-1$ yli-intervallikkoa. Kakkosten partitiot tuottavat yhden yli-intervallikon, kolmosten 3, nelosten 7, viitosten 15, kuutosten 31, seitsemien 63, kahdeksikkojen 127, yhdeksikköjen 255, kymmenten 511, yksientoista 1023 ja kahdentoista 2047. (Koska intervallikkoja on vain 351, on osa varsinkin suurten intervallikoiden partitioissa syntyvistä yli-intervallikoista keskenään samanlaisia).

Esimerkki 24: jos mielivaltaisen intervallikon jäseninä olevien intervallien 3 ja 4 partitiot selvitetään yhtaikaisesti, on muotoutuvia yli-intervallikoita partitioiden keskinäisten kombinaatioiden vuoksi enemmän kuin pelkissä kolmosen tai nelosen tapauksissa.

3	4
111	1111
12	112
21	121
	211
	13
	31
	22

Mikä tahansa kolmosen partitioista voi kombinoitua minkä tahansa nelosen partition kanssa. Myös kolmonen itse voi kombinoitua nelosten partitioiden kanssa, ja päinvastoin. Ainoastaan kolmonen ja nelonen eivät voi kombinoitua keskenään, sillä tällöinhän intervallikko säilyisi ennallaan. Jokainen kombinaatio määrittää alkuperäiselle kolmosen ja nelosen sisältäneelle intervallikolle yhden yli-intervallikon. Kombinaatioita on kaikkiaan (4*8)-1=31, so. kolmosen ja sen partitioiden määrä kerrottuna nelosen ja sen partitioiden määrällä ja vähennettynä yhtaikaisen kolmosen ja nelosen tapauksella.

Yleisesti mielivaltaisen intervallikon jäseninä olevat intervallit n ja m muodostavat partitioiden keskinäisten kombinaatioiden avulla intervallikolle $(2^{n-1}*2^{m-1})$-1 yli-intervallikkoa. Äskeisessä esimerkkitapauksessa siis (2^2*2^3)-1=31. Yhtä hyvin voidaan merkitä (2^{2+3})-1= 31.

Esimerkki 25: kun äskeiseen tapaukseen liitetään vielä viitonen partitioineen, saadaan tulokseksi taulukko, jonka sarakekombinaatioista syntyvät joukkoluokan 3-11 A intervallikon -345- kaikki yli-intervallikot. (Kohta a).

25 a) partitiot

25 b) partitiot sijoitettuna primaarimuodon sävelluokista käsin

3	4	5	0			3				7				
111	1111	11111	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	112	1112	0	1		3	4	5		7	8	9	10	
21	121	1121	0		2	3	4		6	7	8	9		11
	211	1211				3		5	6	7	8		10	11
	13	2111				3	4			7		9	10	11
	31	113				3			6	7	8	9		
	22	131				3		5		7	8			11
		311								7			10	11
		212								7		9	10	
		122								7	8		10	
		221								7		9		11
		14								7	8			
		41								7				11
		23								7		9		
		32								7			10	

Esimerkki 26: joukkoluokan 3-12 intervallikolle -444- suoritettuna sama toimenpide näyttää seuraavalta:

26 a) partitiot

26 b) partitiot sijoitettuna primaarimuodon sävelluokista käsin

4	4	4	0				4				8			
1111	1111	1111	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
112	112	112	0	1	2		4	5	6		8	9	10	
121	121	121	0	1		3	4	5		7	8	9		11
211	211	211	0		2	3	4		6	7	8		10	11
13	13	13	0	1			4	5			8	9		
31	31	31	0			3	4			7	8			11
22	22	22	0		2		4		6		8		10	

Esimerkissä 25 a kolmonen, nelonen ja viitonen partitioineen voivat kombinoitua keskenään kaikilla tavoilla lukuunottamatta tapausta, jossa 3, 4 ja 5 ovat yhtaikaa. Kombinaatioiden ja näinollen koko joukkoluokan 3-11 A intervallikon yli-intervallikkojen määrä on (2^{2+3+4})-1=511.

Taulukko voidaan siirtää yksittäisten joukkojen tasolle valitsemalla jokin intervallikon osoittaman joukkoluokan jäsenjoukoista, ja täyttämällä sen sävelluokkien välisiä intervalleja uusilla sävelluokilla partitioiden osoittamilla tavoilla. Esimerkissä 25 b tämä toimenpide on tehty primaarimuodolle. On helppo huomata, että jokainen oikealla olevien sarakkeiden kombinaatio tuottaa *erilaisen* joukon. Joukkotasolle sijoitetun taulukon sarakekombinaatiot näyttävät 4096-jäsenisen joukkoavaruuden joka ainoan joukon, jolla on ominaisuutena olla esimerkkijoukon *ylijoukko* (superset).

Esimerkissä 26 a yli-intervallikkoja, kuten myös jäsenjoukoista esimerkkitapaukseksi valitun primaarimuodon ylijoukkoja, on (2^{3+3+3})-1=511 eli saman verran kuin esimerkissä 25. Samankokoisilla intervallikoilla on aina yhtä paljon yli-intervallikkoja.

Esim. 27 a) intervallikon -66- partitiot

27 b) partitiot sijoitettuna primaarimuodon sävelluokista käsin

6	6	0						6					
111111	111111	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11112	11112	0	1	2	3	4		6	7	8	9	10	
11121	11121	0	1	2	3		5	6	7	8	9		11
11211	11211	0	1	2		4	5	6	7	8		10	11
12111	12111	0	1		3	4	5	6	7		9	10	11
21111	21111	0		2	3	4	5	6		8	9	10	11
1113	1113	0	1	2	3			6	7	8	9		
1131	1131	0	1	2			5	6	7	8			11
1311	1311	0	1			4	5	6	7			10	11
3111	3111	0			3	4	5	6			9	10	11
1122	1122	0	1	2		4		6	7	8		10	
1221	1221	0	1		3		5	6	7		9		11
2211	2211	0		2		4	5	6		8		10	11
1212	1212	0	1		3	4		6	7		9	10	
2121	2121	0		2	3		5	6		8	9		11
2112	2112	0		2	3	4		6		8	9	10	
114	114	0	1	2				6	7	8			
141	141	0	1				5	6	7				11
411	411	0				4	5	6				10	11
123	123	0	1		3			6	7		9		
231	231	0		2			5	6		8			11
312	312	0			3	4		6			9	10	
132	132	0	1			4		6	7			10	
321	321	0			3		5	6			9		11
213	213	0		2	3			6		8	9		
222	222	0		2		4		6		8		10	
15	15	0	1					6	7				
51	51	0					5	6					11
24	24	0		2				6		8			
42	42	0				4		6				10	
33	33	0			3			6			9		

1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 3-1 intervallikon -1,1,10- tapauksessa yli-intervallikkoja on niinikään $(2^9)-1=511$. Ykkösillä ei ole partitioita, joten ne eivät myöskään kasvata yli-intervallikoiden määrää. Asia ei muutu miksikään vaikka ykkösiä olisi useita peräkkäin. Ainoan 11-jäsenisen joukkoluokan, 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 11-1 intervallikolla -11111111112- on vain yksi yli-intervallikko, joka syntyy ainoan kakkosen jakautuessa kahdeksi ykköseksi. Yli-intervallikko kuuluu joukkoluokalle 12-1.

1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 2-1 intervallikko -1,11- tuottaa $(2^{10})-1=1023$ yli-intervallikkoa. 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 2-2 intervallikko -2,10- tuottaa $(2^{1+9})-1=1023$ yli-intervallikkoa. 2-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 2-6 intervallikko -66- tuottaa $(2^{5+5})-1=1023$ yli-intervallikkoa. (Ks. esim. 27). Symmetriatyyppi ei siis vaikuta yli-intervallikoiden määrään.

A/B-tyyppisen joukkoluokan 4-19 intervallikot -1344- ja -3144- tuottavat kumpikin $(2^{2+3+3})-1=255$ yli-intervallikkoa. A/B-tyyppisen joukkoluokan 4-14 intervallikot -2145- ja -4125- tuottavat kumpikin $(2^{3+1+4})-1=255$ yli-intervallikkoa. Neliakselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-28 intervallikko -3333- tuottaa $(2^{2+2+2+2})-1=255$ yli-intervallikkoa. (Esim.28).

Esim. 28 a) intervallikon -3333- partitiot

3	3	3	3
111	111	111	111
12	12	12	12
21	21	21	21

Esim. 28 b) partitiot sijoitettuna primaarimuodon sävelluokista käsin

0			3			6			9		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1		3	4		6	7		9	10	
0		2	3		5	6		8	9		11

Esimerkki 29: joukkoluokan 5-30 A intervallikolla -13224- yli-intervallikkoja on $(2^{2+1+1+3})-1=127$.

29 a) intervallikon -13224- partitiot

1	3	2	2	4
1	111	11	11	1111
	12			112
	21			121
				211
				13
				31
				22

29 b) partitiot sijoitettuna primaarimuodon sävelluokista käsin

0	1			4		6		8			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	1	2						8	9	10	
	1		3					8	9		11
								8		10	11
								8	9		
								8			11
								8		10	

Yleensä n-jäsenisellä intervallikolla on $(2^{12-n})-1$ yli-intervallikkoa. Määrät koottuina taulukoksi:

(seur. sivu).

Taulukko 1

I	II
1	$(2^{11})-1 = 2047$
2	$(2^{10})-1 = 1023$
3	$(2^{9})-1 = 511$
4	$(2^{8})-1 = 255$
5	$(2^{7})-1 = 127$
6	$(2^{6})-1 = 63$
7	$(2^{5})-1 = 31$
8	$(2^{4})-1 = 15$
9	$(2^{3})-1 = 7$
10	$(2^{2})-1 = 3$
11	$(2^{1})-1 = 1$

I = Intervallikon jäsenintervallien lukumäärä
II = Yli-intervallikoiden lukumäärä

Taulukossa 2 (seur. sivulla) ovat puolestaan koottuina joukkojen osa- ja ylijoukkosuhteiden sekä joukkoluokkien osa- ja ylijoukkoluokkasuhteiden kokonaismäärät.

n-jäsenisen joukon sävelluokista koostuvia osajoukkoja on 2^n -2 kappaletta, kuten myös n-jäsenisen joukkoluokan ja n:ää pienempien ei-tyhjien joukkoluokkien välisiä osajoukkoluokkasuhteita. (Kahden vähennykseen sisältyvät tyhjä joukko/joukkoluokka sekä joukko/joukkoluokka itse). n-jäsenisellä joukolla on siten yhteensä $(2^{12-n} -1) + (2^n -2)$ kappaletta yli/osajoukkoja. n-jäseninen joukkoluokka on osallisena yhteensä vastaavassa määrässä joukkoluokkien välisiä yli/osajoukkoluokkasuhteita.

Taulukon avulla voidaan todeta esimerkiksi, että kullakin 1-jäsenisellä joukolla on 2047 *erilaista* ylijoukkoa, muttei yhtään sävelluokista koostuvaa osajoukkoa. Jokainen joukkoluokan 1-1 kahdestatoista jäsenjoukosta on siis osajoukkona lähes puolessa joukkoavaruuden kaikkiaan 4096:sta erilaisesta joukosta.

Vastaavasti esim. kukin viisijäseninen joukkoluokka on osallisena yhteensä 157:ssä yli/osajoukkoluokkasuhteessa, 127 kertaa osajoukkoluokkana ja 30 kertaa ylijoukkoluokkana. Jne.

Komplementtikardinaalisuudet ovat osallisina yhtä monessa osajoukko/ylijoukko- ja osajoukkoluokka/ylijoukkoluokkasuhteessa (sarake IV).

Taulukko 2

I	II	III	IV
1	$(2^{11})-1=2047$	$(2^{1})-2=0$	$2047+0=2047$
2	$(2^{10})-1=1023$	$(2^{2})-2=2$	$1023+2=1025$
3	$(2^{9})-1=511$	$(2^{3})-2=6$	$511+6=517$
4	$(2^{8})-1=255$	$(2^{4})-2=14$	$255+14=269$
5	$(2^{7})-1=127$	$(2^{5})-2=30$	$127+30=157$
6	$(2^{6})-1=63$	$(2^{6})-2=62$	$63+62=125$
7	$(2^{5})-1=31$	$(2^{7})-2=126$	$31+126=157$
8	$(2^{4})-1=15$	$(2^{8})-2=254$	$15+254=269$
9	$(2^{3})-1=7$	$(2^{9})-2=510$	$7+510=517$
10	$(2^{2})-1=3$	$(2^{10})-2=1022$	$3+1022=1025$
11	$(2^{1})-1=1$	$(2^{11})-2=2046$	$1+2046=2047$
12	$(2^{0})-1=0$	$(2^{12})-2=4094$	$0+4094=4094$

I = Joukon/joukkoluokan koko
II = Ylijoukkojen lukumäärä/ylijoukkoluokkasuhteiden lukumäärä
III = Ei-tyhjien osajoukkojen lukumäärä/osajoukkoluokkasuhteiden lukumäärä
IV= Yli- ja osajoukkojen määrä yhteensä/yli- ja osajoukkoluokkasuhteiden toteutumisten määrä yhteensä

3. 3. KIERTOSYMMETRISTEN JOUKKOLUOKKIEN OSAJOUKKOLUOKKASUHTEET

3.3.1. KIERTOSYMMETRISEN JA EI-KIERTOSYMMETRISEN JOUKKOLUOKAN OSAJOUKKOLUOKKASUHTEET

Kohdassa 1.1. todettiin, että mikäli toinen tai molemmat tutkittavista joukkoluokista S ja T ovat kiertosymmetrisiä, saattavat niiden välillä toteutuvien osajoukkoluokkasuhteiden määrät vaihdella riippuen siitä, kumman joukkoluokan jäsenjoukkoa verrataan toisen joukkoluokan kaikkiin jäsenjoukkoihin. Esimerkkitapauksena oli joukkoluokkien 3-11 A ja 8-28 välillä toteutuvat osajoukkoluokkasuhteet: 3-11 A $\sqsubset^{1}$ 8-28, kun sensijaan 8-28 $\sqsupset^{4}$ 3-11 A.

Seuraavassa tarkastellaan näiden joukkoluokkien osajoukkoluokkasuhteita hieman tarkemmin.

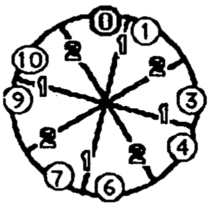
Esimerkki 30: 8-28:n intervallikko on -12121212- ja 3-11 A:n intervallikko

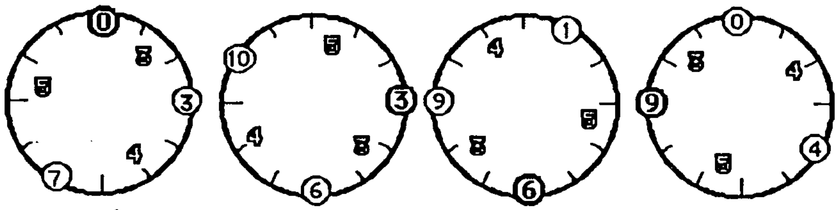
-345-. Jos useampijäsenistä intervallikkoa ajatellaan pidettäväksi paikallaan ja vähemmän jäseniä sisältävää liikuteltavaksi sen sisällä, löytyy intervallikosta -12121212- neljä kohtaa - kaikki ykköset - joista käsin jäseniä yhteenlaskemalla voidaan muodostaa -345-. Joukkotasolla jokainen näistä vaihtoehdoista tuottaisi sävelluokkasisällöltään erilaisen joukon, joten jokaisella intervallikon -12121212- omaavalla joukolla on osajoukkonaan neljä intervallikon -345- omaavaa joukkoa.

Jos taas intervallikko -345- pidetään paikoillaan ja intervallikon -12121212- sykliset permutaatiot tutkitaan vuoroin suhteessa siihen, löytyy neljä vaihtoehtoa - jälleen kaikki ykkösillä alkavat - joista käsin voidaan jäseniä yhteenlaskemalla muodostaa -345-. Jokainen ykkösellä alkava muoto on kuitenkin identtinen, joten niistä syntyvät joukot ovat sävelluokkasisällöiltään identtisiä ja lasketaan tämän vuoksi yhdeksi ja samaksi joukoksi. Jokaisella intervallikon -345- omaavalla joukolla on vain yksi intervallikon -12121212- omaava ylijoukko. (Epäsymmetristen ja 1-akselisesti symmetristen joukkoluokkien tapauksissa on samantekevää, kumpaa intervallikoista ajatellaan paikallaan pidettäväksi ja kumpaa liikulteltavaksi. Tulos on molemmin päin sama).

Joukkotasolla käänteisten asetelmien poikkeavat tulokset näkyvät yhtälailla selvästi. 8-28:n jäsenjoukoista valitaan vertailukohdaksi primaarimuoto {0,1,3,4,6,7,9,10} (Esim.30 a) ja tutkitaan joukkoluokan 3-11 A jäsenjoukot suhteessa siihen. 8-28/0:n osajoukoiksi osoittautuvat jäsenjoukot 0, 3, 6 ja 9. eli joukot {0,3,7}, {3,6,10}, {6,9,1} ja {9,0,4}. (Esim.30 b-e).

Esim.30 a

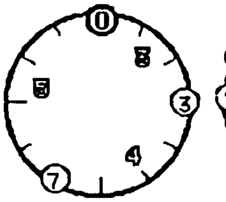




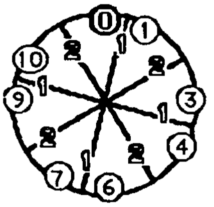
30 b 30 c 30 d 30 e

Esimerkki 31: Sama operaatio toisin päin. 3-11 A:n jäsenjoukoista valitaan vertailukohdaksi primaarimuoto {0,3,7} (esim.31 a) ja tutkitaan 8-28:n jäsenjoukot suhteessa siihen. 8-28:n jäsenjoukkojen määrä on 12 jaettuna intervallikon -12121212- jaksojen määrällä eli 12/4=3. Joukot ovat {0,1,3,4,6,7,9,10} (esim.31 b), {1,2,4,5,7,8,10, 11} ja {2,3,5,6,8,9,11,0}, joista ainoastaan {0,1,3,4,6,7,9,10} on joukon {0,3,7} ylijoukko.

Esim.31 a



31 b



Esimerkistä näkyy, kuinka keskeisellä tavalla kiertosymmetristen joukkoluokkien osajoukkoluokkatarkasteluihin vaikuttaa se, kumman joukkoluokan intervallikko (jäsenjoukko) on paikallaanpidettävänä vertailuintervallikkona (tai -joukkona) ja kumman sykliset permutaatiot (jäsenjoukot) tutkitaan vuoroin suhteessa siihen. Kun kiertosymmetristä joukkoa pidetään vertailujoukkona paikoillaan ja epäsymmetrisen tai 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan jäsenjoukot tutkitaan vuoronperään suhteessa siihen, on tutkittavia tapauksia aina 12.

Jos taas epäsymmetristä tai 1-akselisesti symmetristä joukkoa pidetään vertailujoukkona paikoillaan ja kiertosymmetrisen joukkoluokan jäsenjoukkoja tutkitaan vuoroin suhteessa siihen, on tutkittavia tapauksia on aina vähemmän kuin 12, tarkemmin sanottuna 12/j, jossa j on kiertosymmetrisen joukkoluokan intervallikon jaksojen lukumäärä.

Toisinsanoen paikallaanpidettävä vertailujoukko on siinä mielessä passiivinen, että sen symmetrisyys tai epäsymmetrisyys ei aiheuta muutoksia syntyvien osajoukkotapausten määrään. Vain "liikuteltavan" joukkoluokan symmetriaominaisuudet ovat ratkaisevia tekijöitä.

Yleisesti, jos S on epäsymmetrinen tai 1-akselisesti symmetrinen joukkoluokka ja T on kiertosymmetrinen joukkoluokka siten että T:n intervallikon jaksojen lukumäärä on j ja #T > #S, voidaan niiden välisten osajoukkoluokkasuhteiden määrästä todeta:

$$\text{Jos } T \sqsupset^{n} S\text{, niin } S \sqsubset^{n/j} T$$

Jos taas T on epäsymmetrinen tai 1-akselisesti symmetrinen joukkoluokka ja S on kiertosymmetrinen joukkoluokka siten että S:n intervallikon jaksojen lukumäärä on j ja #T > #S, voidaan todeta:

$$\text{Jos } S \sqsubset^{n} T\text{, niin } T \sqsupset^{n/j} S$$

3.3.2.KAHDEN KIERTOSYMMETRISEN JOUKKOLUOKAN OSAJOUKKOLUOKKASUHTEET

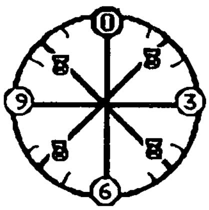
Kahden kiertosymmetrisen joukkoluokan väliset osajoukkoluokkasuhteet muotoutuvat samaan tapaan kuin äskeisissä tapauksissa. Toisen joukkoluokan mielivaltaista jäsenjoukkoa (tai intervallikkoa) ajatellaan pidettäväksi paikoillaan ja toisen jäsenjoukkoja (syklisiä permutaatioita) verrataan vuoroin siihen. Paikallaan pidetyn joukon (intervallikon) symmetriset ominaisuudet eivät vaikuta syntyvien tapausten määrään, sensijaan liikuteltavan joukkoluokan (intervallikon) symmetriaominaisuudet vaikuttavat. Mahdollisia asetelmia on kaksi:

1) tutkittavien joukkoluokkien intervallikot koostuvat eri määrästä jaksoja (esim. 32-33)
2) intervallikot koostuvat yhtä monesta jaksosta (esim. 35-36).

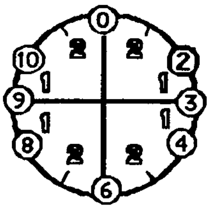
1)

Esimerkki 32: paikaallaanpidetty joukko on neliakselisesti symmetrisistä joukoista muodostuvan joukkoluokan 4-28 primaarimuoto, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9} ja intervallikoltaan -3333-. (Esim.32 a). Sitä verrataan kaksiakselisesti symmetrisistä joukoista muodostuvan joukkoluokan 8-25, intervallikoltaan -11221122-, jäsenjoukkoihin. Joukolle {0,3,6,9} löytyy 8-25:n kuudesta jäsenjoukosta kaksi ylijoukkoa, {2,3,4,6,8,9,10,0} ja {5,6,7,9,11,0,1,3} (Esim.32 b-c).

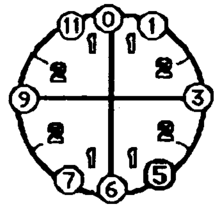
Esim.32 a



32 b

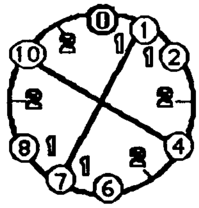


32 c

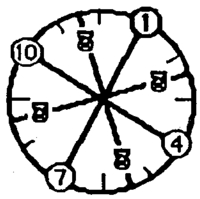


Esimerkki 33: äskeinen asetelma päinvastaisena. Paikaallaanpidetty joukko on 8-25:n primaarimuoto {0,1,2,4,6,7,8,10}. (Esim.33 a). Sitä verrataan joukkoluokan 4-28 kolmeen jäsenjoukkoon, joista vain yksi, {1,4,7,10}, on sen osajoukko. (Esim.33 b).

Esim.33 a



33 b



Yleisesti, jos S on kiertosymmetrinen joukkoluokka jonka intervallikon jaksojen lukumäärä on j, ja T on kiertosymmetrinen joukkoluokka jonka intervallikon jaksojen lukumäärä on i, ja #T > #S, voidaan niiden välisten osajoukkoluokkasuhteiden määrästä todeta:

$$\text{Jos } T \sqsupset^{n} S\text{, niin } S \sqsubset^{(n^{*} j)/i} T$$

sekä

jos $S \sqsubset^{n} T$, niin $T \sqsupset^{(n*i)/j} S$

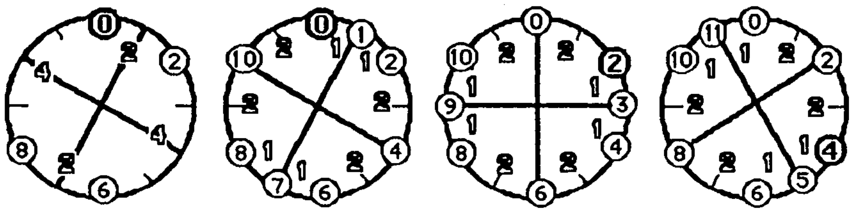
Jos esimerkkien 32-33 tapauksissa selvitetään ensin vaihtoehto 4-28 $\sqsubset^{2}$ 8-25, saadaan ylläolevan kaavan avulla käänteisen asetelman tuottamien osajoukkoluokkasuhteiden määrä suoraan seuraavasti: 4-28:n intervallikon -3333- jaksojen lukumäärä on 4 (j) ja 8-25:n intervallikon -11221122- jaksojen lukumäärä on 2 (i). 4-28 $\sqsubset^{2}$ 8-25, joten 8-25 $\sqsupset^{(2*2)/4}$ 4-28 = 8-25 $\sqsupset^{1}$ 4-28.
Jos taas ensin selvitetään vaihtoehto 8-25 $\sqsupset^{1}$ 4-28, saadaan käänteinen asetelma seuraavasti: 8-25 $\sqsupset^{1}$ 4-28, joten 4-28 $\sqsubset^{(1*4)/2}$ 8-25 = 4-28 $\sqsubset^{2}$ 8-25.

Esimerkki 34: kiertosymmetrisen joukkoluokan 4-25 intervallikon -2424- jaksojen lukumäärä on 2. Kiertosymmetrisen joukkoluokan 9-12 intervallikon -112112112- jaksojen lukumäärä on 3. Jos vaihtoehtoisista osajoukkoluokka-asetelmista selvitetään ensin 4-25 $\sqsubset^{2}$ 9-12, saadaan käänteinen tilanne seuraavasti: 4-25 $\sqsubset^{2}$ 9-12, joten 9-12 $\sqsupset^{(2*3)/2}$ 4-25 = 9-12 $\sqsupset^{3}$ 4-25.
Jos taas vaihtoehdoista selvitetään ensin 9-12 $\sqsupset^{3}$ 4-25, saadaan käänteisasetelma seuraavasti: 9-12 $\sqsupset^{3}$ 4-25, joten 4-25 $\sqsubset^{(3*2)/3}$ 9-12 = 4-25 $\sqsubset^{2}$ 9-12.

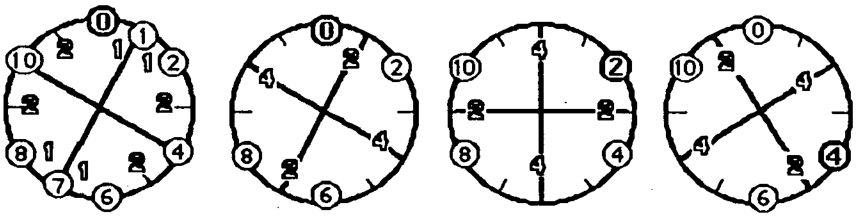
2)

Esimerkki 35: paikaallaanpidetty vertailujoukko on kiertosymmetrisen joukkoluokan 4-25, intervallikoltaan -2424-, primaarimuoto {0,2,6,8}. Intervallikon jaksojen määrä on 2. (Esim.35 a). Joukkoa verrataan kiertosymmetrisen joukkoluokan 8-25 kuuteen jäsenjoukkoon, joiden intervallikko on -11221122- ja intervallikon jaksojen määrä niinikään 2. Jäsenjoukoista kolme on joukon {0,2,6,8} ylijoukkoja. (Esim.35 b-d).

Esim.35 a b c d



Esim. 36 a b c d



Esim. 36: äskeinen asetelma päinvastaisena. Paikallaan pidetty joukko on joukkoluokan 8-25 primaarimuoto {0,1,2,4,6,7,8,10}. (Esim. 36 a). Sitä verrataan joukkoluokan 4-25 kuuteen jäsenjoukkoon, joista sen osajoukkoja on

kolme. (Esim. 36 b-d).

Mikäli kahden kiertosymmetrisen joukkoluokan intervallikoiden jaksojen lukumäärä on sama, i=j, ovat käänteisten osajoukkoluokka-asetelmien tuottamien osajoukkoluokkasuhteiden määrät myöskin aina samat: jos $S \sqsubset^{n} T$, niin $T \sqsupset^{n} S$.

3. 4. OSAINSTANSSILUOKKASUHTEET

Suuremman ja pienemmän instanssin välille voi syntyä osainstanssisuhde joukkojenvälisen osajoukkosuhteen tavoin. Edelleen voi kahden instanssiluokan M ja N, $\#M \neq \#N$, välille syntyä osainstanssiluokkasuhde.

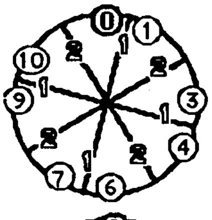
Oletetaan instanssiluokat M ja N, joiden intervallikot ovat E ja F. Niiden välille syntyy tietynlainen osainstanssiluokkasuhde. Tämän jälkeen voidaan tutkia osajoukkoluokkasuhteet sellaisten joukkoluokkien S ja T välillä, joiden intervallikot myöskin ovat E ja F.

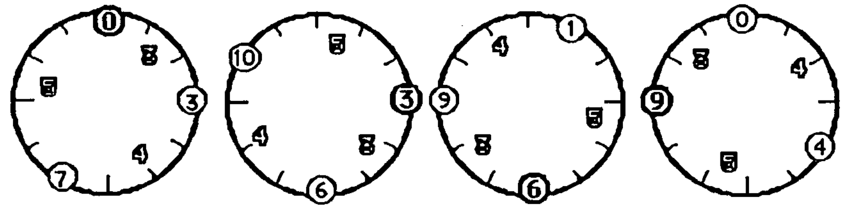
M:n ja N:n väliset osainstanssiluokkasuhteet ovat identtisiä S:n ja T:n välisten osajoukkoluokkasuhteiden kanssa kaikissa niissä yhteisen E:n ja F:n tapauksissa, joissa M ja N ovat epäsymmetrisistä tai 1-akselisesti symmetrisistä rakenteista johdettuja instanssiluokkia. S ja T ovat tällöin vastaavasti epäsymmetrisiä tai 1-akselisesti symmetrisiä joukkoluokkia.

Sensijaan M:n ja N:n väliset osainstanssiluokkasuhteet poikkeavat S:n ja T:n välisistä osajoukkoluokkasuhteista niissä yhteisen E:n ja F:n tapauksissa, joissa M ja N ovat kiertosymmetrisistä rakenteista johdettuja instanssiluokkia ja S ja T vastaavasti kiertosymmetrisiä joukkoluokkia. Erot syntyvät siitä, että instanssiluokka on rakenteiden symmetriaominaisuuksista riippumatta 12 jäseninstanssia sisältävä, joukkoluokan jäsenjoukkojen määrän vaihdellessa kiertosymmetrioiden jaksojen lukumääristä riippuen.

Instanssiluokkien 12-jäsenisyydestä seuraa, että osainstanssiluokkasuhteet ovat kaikissa olosuhteissa käänteiset. Toisinsanoen jos $M \sqsubset^{n} N$, niin $N \sqsupset^{n} M$.

Esim. 37 a





37 b c d e

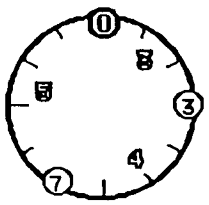
Seuraavassa muutama esimerkki tapauksista, joissa instanssiluokkien suhteet poikkeavat joukkoluokkien suhteista. Esimerkit ovat "saman E:n ja F:n tapauksia" verrattuna aiemmin käsiteltyihin joukkoluokkatapauksiin.

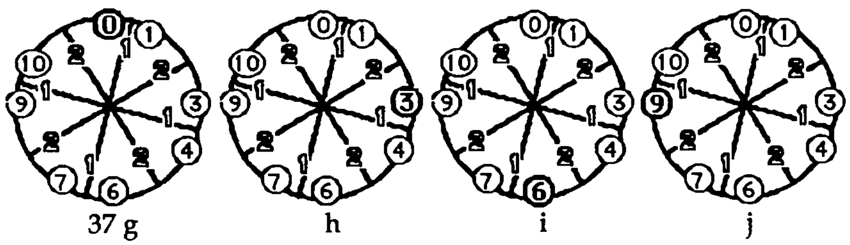
Esimerkki 37: esimerkkien 30-31 tapauksissa selvitettiin osajoukkoluokkasuhteet tapauksessa, jossa joukkoluokkien intervallikot olivat -12121212- ja -345-. Seuraavassa samoilla intervallikoilla varustettujen instanssiluokkien osainstanssiluokkasuhteet.

Kohdassa 37 a (edell. sivu) paikallaan pidettävänä vertailuinstanssina on <0,1,3,4,6,7,9,10>. Sen osainstansseiksi osoittautuvat <0,3,7>, <3,6,10>, <6,9,1> ja <9,0,4>. (Kohdat b-e.). Tilanne on identtinen verrattuna esimerkkiin 30.

Kohdissa 37 f-j sama asetelma päinvastaisena. Kohdassa f on paikallaan pidettävänä vertailuinstanssina <0,3,7>. Esimerkin 31 tilanteesta poiketen sillä on intervallikon -12121212- omaavan instanssiluokan keskuudessa neljä yli-instanssia: <0,1,3,4,6,7,9,10>, <3,4,6,7,9,10,0,1>, <6,7,9,10,0,1,3,4> ja <9,10,0,1,3,4,6,7>. Niiden sävelluokkasisältö on identtinen. (Kohdat 37 g-j).

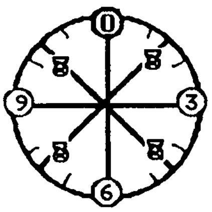
Esim. 37 f

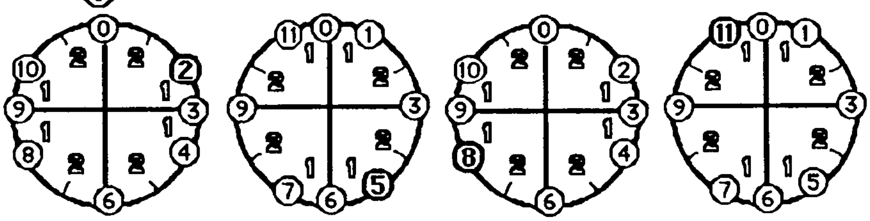




37 g h i j

Esim.38 a



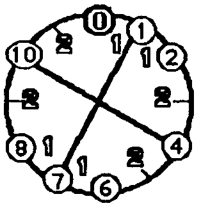


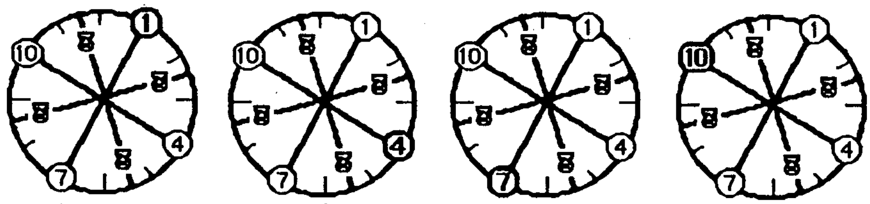
38 b c d e

Esimerkki 38: esimerkkien 32-33 tapauksissa selvitettiin osajoukkoluokkasuhteet tapauksessa, jossa joukkoluokkien intervallikot olivat 2-jaksoinen -11221122- ja nelijaksoinen -3333-. Seuraavassa samoilla intervallikoilla varustettujen instanssiluokkien osainstanssiluokkasuhteet.

Kohdassa a (edell. sivu) on paikallaan pidettävänä vertailuinstanssina <0,3,6,9>. Intervallikon -11221122- omaavassa instanssiluokassa sillä on 4 yli-instanssia: <2,3,4,6,8,9,10,0>, <5,6,7,9,11,0,1>, <8,9,10,0,2,3,4,6> ja <11,0,1,3,5,6,7,9>, jotka ovat sävelluokkasisällöiltään pareittain identtisiä (2. ja 8. instanssi sekä 5. ja 11. instanssi). (Kohdat b-e). Esimerkissä 32 vastaavia osajoukkosuhteita syntyi vain kaksi.
38 f-j: sama asetelma toisin päin. Vertailuinstanssina on <0,1,2,4,6,7,8,10>. Intervallikon -3333- omaavan instanssiluokan jäsenistä on sen osainstansseja 4: <1,4,7,10>, <4,7,10,1>, <7,10,1,4> ja <10,1,4,7,>. Kaikkien sävelluokkasisältö on sama. (38 g-j). Esimerkissä 33 osajoukkosuhteita syntyi vain yksi.

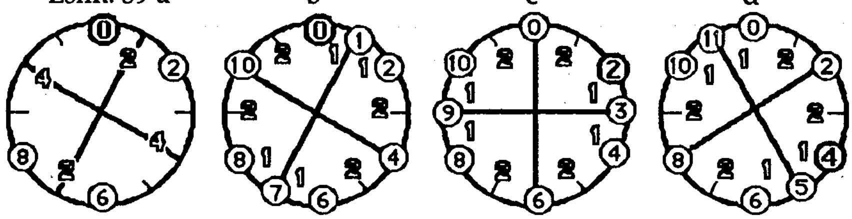
Esim.38 f

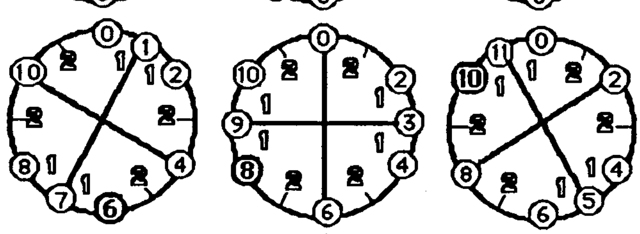




38 g h i j

Esim. 39 a b c d





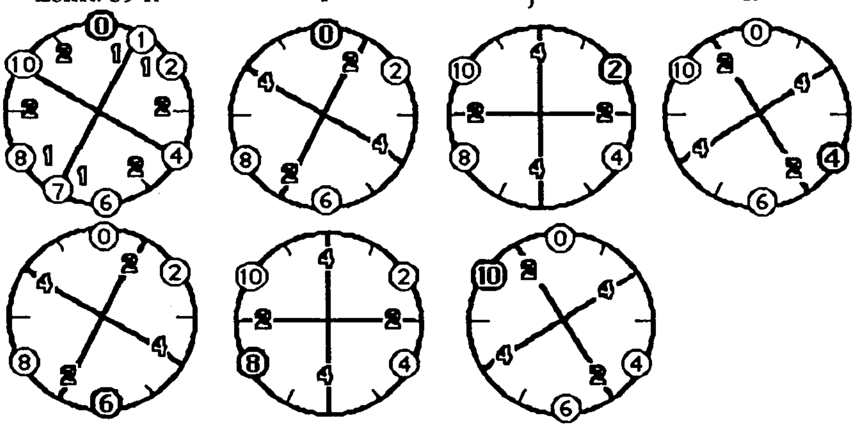
39 e f g

Esimerkki 39: esimerkeissä 35-36 selvitettiin osajoukkoluokkasuhteet tapauksessa, jossa joukkoluokkien intervallikot olivat -2424- ja -11221122-. Nyt tutkitaan samoilla intervallikoilla varustettujen instanssiluokkien osainstanssiluokkasuhteet.

Kohdassa 39 a (edell. sivu) on paikallaan pidettäväksi vertailuinstanssiksi valittu <0,2,6,8>. Intervallikon -11221122- omaavassa instanssiluokassa sillä on 6 yli-instanssia: <0,1,2,4,6,7,8,10>, <2,3,4,6,8,9,10,0> , <4,5,6,8,10,11,0,2>, <6,7,8,10,0,1,2,4>, <8,9,10,0,2,3,4,6> ja <10,11,0,2,4,5,6,8>, jotka ovat sävelluokkasisällöiltään pareittain identtisiä (0. ja 6. instanssi, 2. ja 8. instanssi sekä 4. ja 10. instanssi).(Kohdat b-g). Esimerkissä 35 syntyi osajoukkosuhteita 3.

39 h-n: sama tilanne toisin päin. Vertailuinstanssina nyt <0,1,2,4,6,7,8,10>. (Kohta 39 h). Intervallikon -2424- omaavan instanssiluokan jäsenistä on sen osainstansseja kuusi: <0,2,6,8>, <2,4,8,10>, <4,6,10,0>, <6,8,0,2>, <8,10,2,4> ja <10,0,4,6,>. 0. ja 6., 2. ja 8. sekä 4. ja 10. instanssi ovat sävelluokkasisällöiltään pareittain identtisiä. (Kohdat 39 i-n). Esimerkin 36 tapauksessa syntyi osajoukkosuhteita kolme.

Esim. 39 h i j k



39 l m n

Instanssiluokkien välisten osainstanssiluokkasuhteiden käänteisyys koskee myös luokkien komplementtiluokkia.

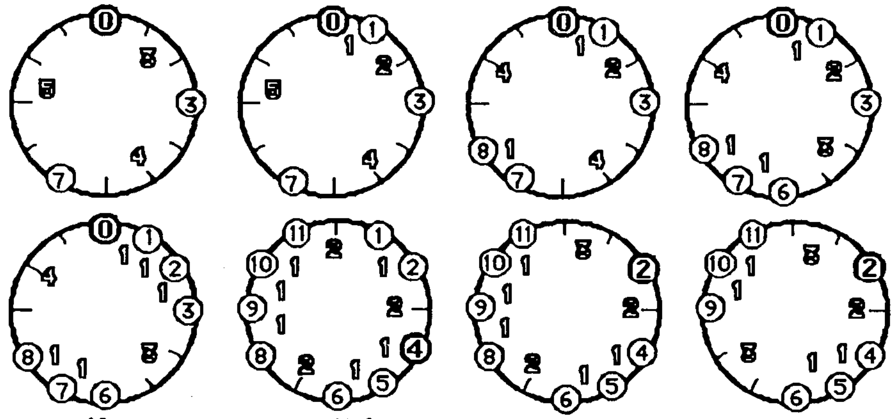
Jos instanssiluokan N kukin jäsen toteuttaa osainstanssisuhteen x kappaleeseen instanssiluokan M jäsenistä, toteuttaa vastaavasti instanssiluokan N komplementtiluokan N' kukin jäsen osainstanssisuhteen x kappaleeseen instanssiluokan M komplementtiluokan M' jäsenistä.

Esimerkki 40: kohdissa 40 a-e on ryhmä instansseja, joista edellinen on aina seuraavan osainstanssi. Esimerkeissä 40 f-j on a-e -kohtien komplementti-instanssit. Osainstanssisuhteet menevät päinvastoin, jälkimmäinen on aina edellisen osainstanssi. (Ks. seur. sivu).

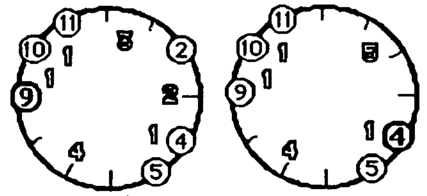
Esimerkki 41: intervallikon -2111223- omaavan instanssiluokan (jonka joukkoluokkavastine on 7-23 A) jokaisella jäsenellä on osainstanssinaan 2 intervallikon -2235- omaavan instanssiluokan (joukkoluokkavastine 5-23

A) jäseninstanssia. Esim.41 a:ssa on instanssi -2111223-/0, esimerkeissä b-c sen osainstanssit -2235-/0 ja -2235-/5. (Ks. 41 a-c).

Esim.40 a 40 b 40 c 40 d

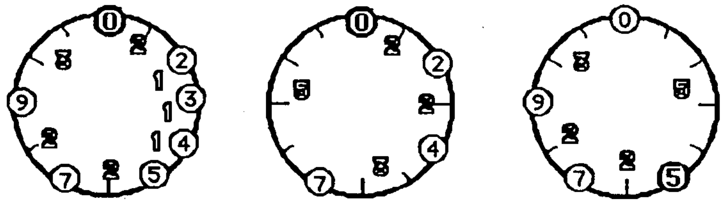


40 e 40 f 40 g 40 h



40 i 40 j

Esim.41 a 41 b 41 c



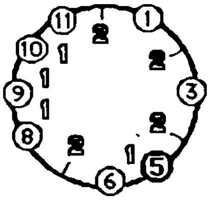
Nelijäsenisen luokan kahdeksanjäsenisen komplementtiluokan intervallikko on -12111222- ja joukkoluokkavastine 8-22 B. Kullakin sen jäsenellä on osainstanssinaan kaksi jäsentä instanssiluokasta, joka on äskeisen 7-jäsenisen instanssiluokan komplementtiluokka. Tämän luokan intervallikko on -22125- ja joukkoluokkavastine 5-23 B.

Esimerkissä 42 a on instanssi -12111222-/5. Esimerkeissä 42 b ja c ovat sen osainstanssit -22125-/6 ja -22125-/1. (Seur. sivu).

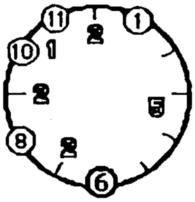
Esimerkissä 42 d on instanssi -12111222-/10. Esimerkeissä 42 e ja f ovat sen osainstanssit -22125-/6 ja -22125-/11.

Vastaavasti intervallikon -22125- omaavan instanssiluokan jokainen jäsen on kahden intervallikon -12111222- omaavan instanssiluokan jäsenen osainstanssi. Esimerkissä 43 a (seur. sivu) on instanssi -22125-/6. Kohdissa 43 b ja c instanssit -12111222-/5 ja -12111222-/10, joiden osainstanssi -22125-/6 on.

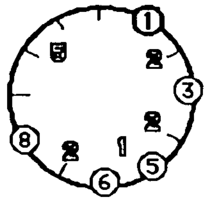
Esim.42 a

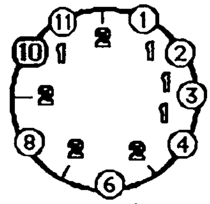


42 b

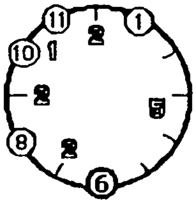


42 c

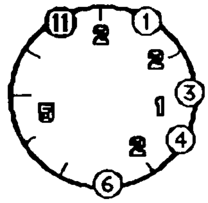




42 d

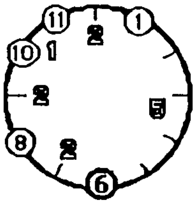


42 e

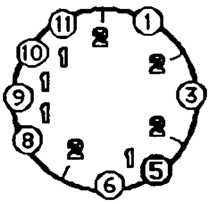


42 f

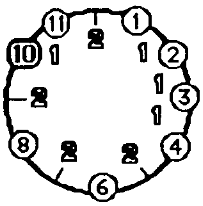
Esim.43 a



b



c



Ja edelleen verkostoksi laajennettuna: jos mielivaltaisen kokoisen instanssiluokkaryhmän kunkin instanssiluokan kukin jäseninstanssi toteuttaa tietyn määrän osainstanssisuhteita luokkaryhmän muiden instanssiluokkien jäsenten kanssa, toteuttavat luokkaryhmän komplementtiluokkaryhmän instanssiluokkien jäsenet *keskenään* täsmälleen samalla tavalla täsmälleen vastaavan määrän osainstanssisuhteita. Koko intervalliavaruudella on siis osainstanssitarkastelun kannalta eräänlainen symmetriaominaisuus.

Tiettyjen osainstanssiluokkasuhteiden "peilautuminen" koskemaan samanlaisina komplementti-instanssiluokkia pätee tahollaan myös epäsymmetrisiin ja 1-akselisesti symmetrisiin joukkoluokkiin. Kiertosymmetriset joukkoluokat aiheuttavat jälleen poikkeuksia.

Forte sivuaa komplementtien ja osajoukkoisuuden suhdetta käsitellessään ns. Kh-subkompleksisuhdetta: jos joukkoluokkien S ja T välillä vallitsee osajoukkoluokkasuhde, vallitsee myös niiden komplementtijoukkoluokkien S' ja T' välillä osajoukkoluokkasuhde.[9] Muodostuvien suhteiden määrään vaikuttaviin tekijöihin ei lähemmin puututa.

4. LEIKKAUSVEKTORIT

4.1. YLEISTÄ

4.1.1. LEIKKAUSVEKTORIN PERIAATE

Eräs mahdollisista näkökulmista kahden joukon välisten suhteiden tarkastelussa on *leikkaus,* joka koostuu joukkojen sisältämistä yhteisistä sävelluokista.[1] Leikkauksen tutkiminen on joukkoteoreettisista toimenpiteistä helpoimpia. Jos kahdella vaikkapa analyysitilanteessa esiin nousseella joukolla on identtinen sävelluokkasisältö, on kysymyksessä luonnollisesti saman joukon kaksi eri esiintymää.

Esim. 1 a-b: {0,1,5,6,7} ∩ {0,1,5,6,7} = {0,1,5,6,7}.

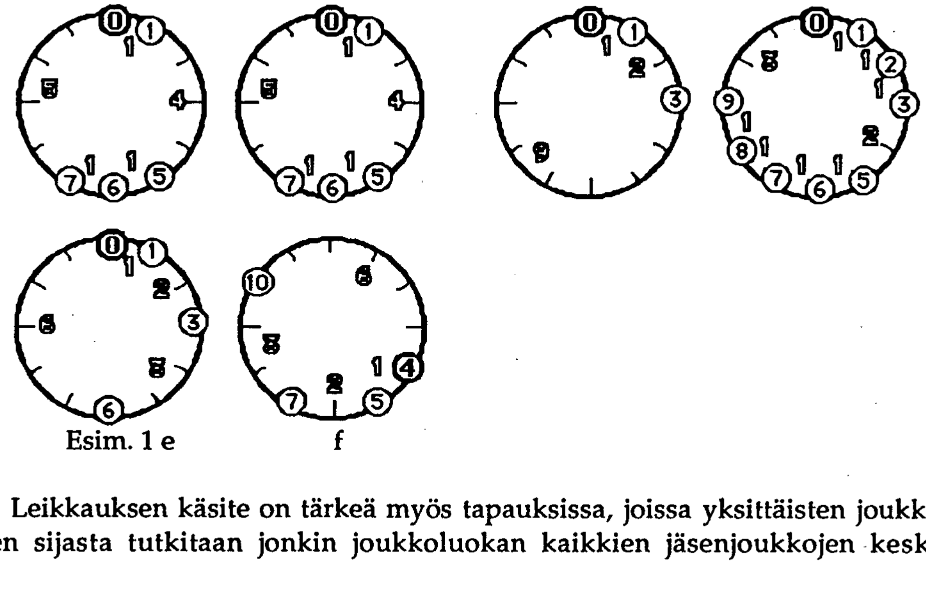
Jos kardinaalisuudeltaan pienemmän joukon kaikki sävelluokat ovat suuremmankin jäseniä, vallitsee joukkojen välillä osajoukkosuhde.

Esim 1 c-d: {0,1,3} ∩ {0,1,2,3,5,6,7,8,9} = {0,1,3}. {0,1,2,3,5,6,7,8,9} ⊃ {0,1,3}.

Jos kahdella joukolla ei ole yhtään yhteistä jäsentä, ovat ne sävelluokkasisältöjensä kannalta mahdollisimman erilaiset.

Esim.1 e-f: {0,1,3,6} ∩ {4,5,7,10}={∅}.

Esim.1 a b c d



Esim. 1 e f

Leikkauksen käsite on tärkeä myös tapauksissa, joissa yksittäisten joukkojen sijasta tutkitaan jonkin joukkoluokan kaikkien jäsenjoukkojen keskinäisiä tai kahden joukkoluokan kaikkien jäsenjoukkojen välisiä suhteita.[2]

Esimerkki 2: tehtävänä on selvittää joukkoluokan 3-11 A jäsenjoukkojen ja joukkoluokan 3-11 B jäsenjoukkojen leikkausten koot. Perinteisen musiikinteorian termein ilmaistuna tutkitaan yhteisten sävelten määrä molli- ja duurikolmisointujen välillä.

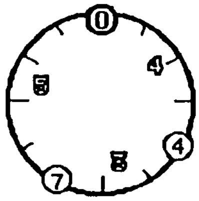
Kummassakin joukkoluokassa on 12 jäsenjoukkoa. Jokaisen 3-11 A:n jäsenjoukon ja jokaisen 3-11 B:n jäsenjoukon leikkaus voidaan tutkia, osoittautuipa tietyllä joukkoparilla olevan yhteisiä sävelluokkia tai ei. Tapauksia on kaikkiaan 12*12=144. Määrä on niin suuri, että yksitellen tapahtuva kaikkien laikkausten tutkiminen ei ole mielekäs vaihtoehto. Käytännöllisempää on valita jommastakummasta joukkoluokasta yksi jäsenjoukko luokkansa edustajaksi, ja verrata siihen vuoronperään toisen joukkoluokan kaikkia kahtatoista jäsenjoukkoa. Tutkittavia tapauksia on tällöin 12.

Vertailtavaksi joukoksi voidaan valita mikä joukko tahansa kummasta joukkoluokasta tahansa. Kun vertailtavaksi joukoksi on valittu vaikkapa tietty 3-11 B:n jäsenjoukko, on vielä kiinnitettävä huomiota siihen, mistä nimenomaisesta jäsenjoukosta 3-11 A:n *jäsenjoukkokierto* eli jäsenjoukkojen vuorottainen vertaaminen aloitetaan. Vertailtavan joukon ja 3-11 A:n jäsenjoukkokierron aloittavan joukon välinen etäisyys vaikuttaa lopputulokseen.

Jäsenjoukkokierto sovitaan suoritettavaksi aina siten, että kierron aloittavasta joukosta edetään nousevassa järjestyksessä normaalijäsentensä numeroarvoilta kasvaviin joukkoihin (ympyrällä myötäpäivään). Kiertosymmetrisiä tapauksia silmälläpitäen sovitaan lisäksi, että jäsenjoukkokierto mielletään kierron aloittavan joukon transponointina intervalleilla 1,2,3...11, eikä joukkoluokan jäsenjoukkojen luettelemisena. Epäsymmetrisissä ja 1-akselisesti symmetrisissä tapauksissahan nämä kaksi näkökulmaa tuottavat saman lopputuloksen.[3]

Esimerkissä 2 valitaan vertailtavaksi joukoksi 3-11 B/0 eli -435-/0, sävelluokkasisällöltään {0,4,7}. (R-avaruudessa C-duurikolmisointu). (Kohta a).

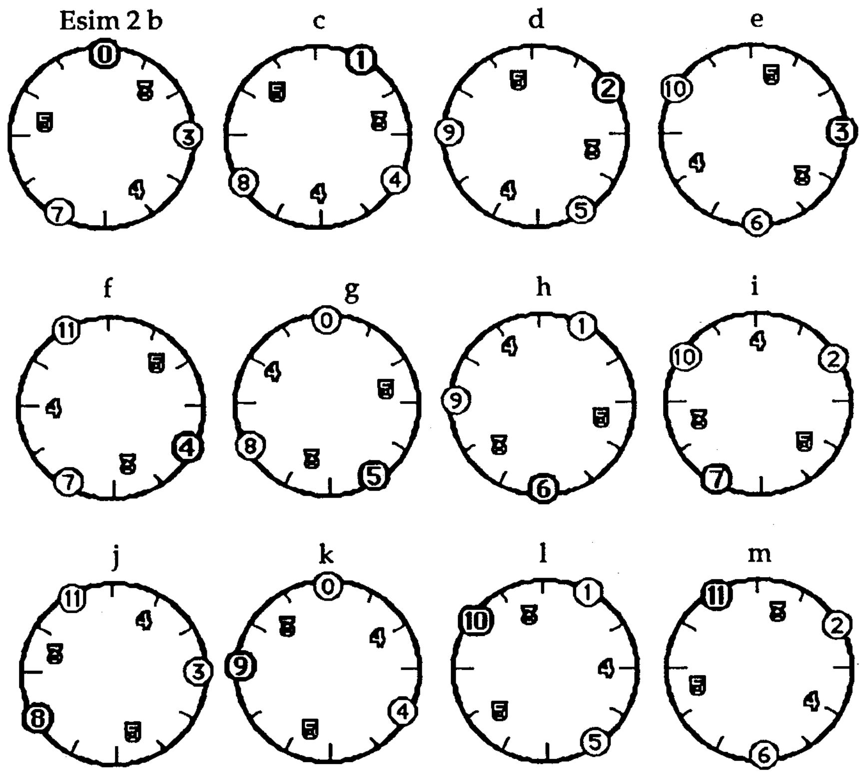
Esim 2 a



Jäsenjoukkokierron aloitusjoukoksi valitaan 3-11 A/0 eli -345-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,7}. (R-avaruudessa c-mollikolmisointu). (Esim. 2 b). Kohdissa 2 b-m joukkoluokan 3-11 A jäsenjoukot. (Seur. sivu).

Vertailtavan joukon 3-11 B/0 ja joukkoluokan 3-11 A kunkin jäsenjoukon leikkauksen koko merkitään 12-paikkaiseen *leikkausvektoriin*. (Esim. 3).

Leikkausvektorissa viivan alapuolella olevat numerot ovat *indeksejä*. Ne osoittavat kuinka monennesta "vektorinpaikasta" on kyse.[4] (Seur. sivu).



Leikkausvektorin indeksi n viittaa vertailtavan joukon ja jäsenjoukkokierron aloitusjoukon n:nen transposition leikkaukseen. 0. indeksi viittaa siten aina vertailtavan joukon ja jäsenjoukkokierron aloitusjoukon leikkaukseen. 1. indeksi viittaa aina vertailtavan joukon ja yhdellä puolisävelluokka-askeleella transponoidun jäsenjoukkokierron aloitusjoukon leikkaukseen. 2. indeksi viittaa aina vertailtavan joukon ja kahdella puolisävelluokka-askeleella transponoidun jäsenjoukkokierron aloitusjoukon leikkaukseen. Jne. Laskemalla yhteen jäsenjoukkokierron aloitusjoukon normaalijäsen ja indeksin n numeroarvo saadaan selville, kuinka mones joukkoluokkansa joukko jäsenjoukkokierron aloitusjoukon n:s transpositio on. Esimerkin 3 tapauksessa 0.indeksi viittaa vertailtavan joukon 3-11 B/0 ja jäsenjoukkokierron aloitusjoukon 3-11 A/0 leikkaukseen. Joukot ovat kuvattuina esimerkin 2 kohdissa a ja b. 1.indeksi viittaa 3-11 B/0:n ja joukon 3-11 A/1 leikkaukseen. (Esim.2, kohdat a ja c). 2. indeksi viittaa 3-11 B/0:n ja joukon 3-11 A/2 leikkaukseen. (Esim.2, kohdat a ja d) jne.

Leikkausvektorissa viivan yläpuolella olevat numerot ovat *komponentteja*, jotka ilmaisevat syntyneiden leikkausten koot (leikkausjoukkojen jäsenmäärät). Indeksin n komponentti kertoo vertailtavan joukon ja jäsenjoukkokierron aloitusjoukon n:nen transposition yhteisten sävelluokkien määrän.

Esim.3

2	1	0	0	2	1	0	1	0	2	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Perinteisin termein ilmaistuna muodostavat C-duurisoinnun ja c-mollisoinnusta aloitetun jäsenjoukkokierron leikkaukset samanlaisen vektorin kuin E-duurisoinnun ja e-mollisoinnusta aloitetun jäsenjoukkokierron leikkaukset tai A-duurisoinnun ja a-mollisoinnusta aloitetun jäsenjoukkokierron leikkaukset. Sitävastoin esimerkiksi C-duurisoinnun ja b-mollisoinnusta aloitetun jäsenjoukkokierron leikkaukset tai E-duurisoinnun ja f-mollisoinnusta aloitetun jäsenjoukkokierron leikkaukset muodostavat hieman erilaiset vektorit kuin äskeisissä tapauksissa, sillä lähtöasetelman muodostavien sointujen etäisyydet ovat erilaiset. C/b- ja E/f- tapausten tuottamat vektorit (esim. 4 b ja c) muodostuvat luonnollisesti samoista komponenteista kuin C/c-, E/e- tai A/a- tapauksissa (esim. 4 a), mutta komponenttien jonon eri jäsenistä alkaen lueteltuina.

Käsiteltäessä tällaisia tapauksia, joissa useiden vektoreiden komponentit muodostavat samansisältöiset ja -suuntaiset mutta eri komponenteista alkavat numerojonot (indeksiin 0 tulee kulloinkin jonon eri jäsen), voidaan ilmaista, että vektorit ovat toistensa *rotaatioita.*[5]

4 a

2	1	0	0	2	1	0	1	0	2	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4 b

0	0	2	1	0	0	2	1	0	1	0	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

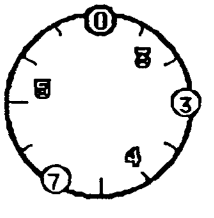
4 c

1	0	0	2	1	0	1	0	2	0	0	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Edellisen esimerkin asetelman tapaan voidaan tutkia myös yksittäisen joukkoluokan jäsenjoukkojen keskinäisiä leikkauksia. Tällöinkin valitaan yksi jäsenjoukko vertailtavaksi joukoksi, tutkien vuoronperään sen ja kaikkien jäsenjoukkojen leikkaukset.

Jäsenjoukkokierron aloitusjoukkoa valittaessa on pantava merkille sen ja vertailtavan joukon välinen etäisyys, sillä etäisyyden muutokset vaikuttavat syntyvään vektoriin samoin kuin esimerkissä 4.

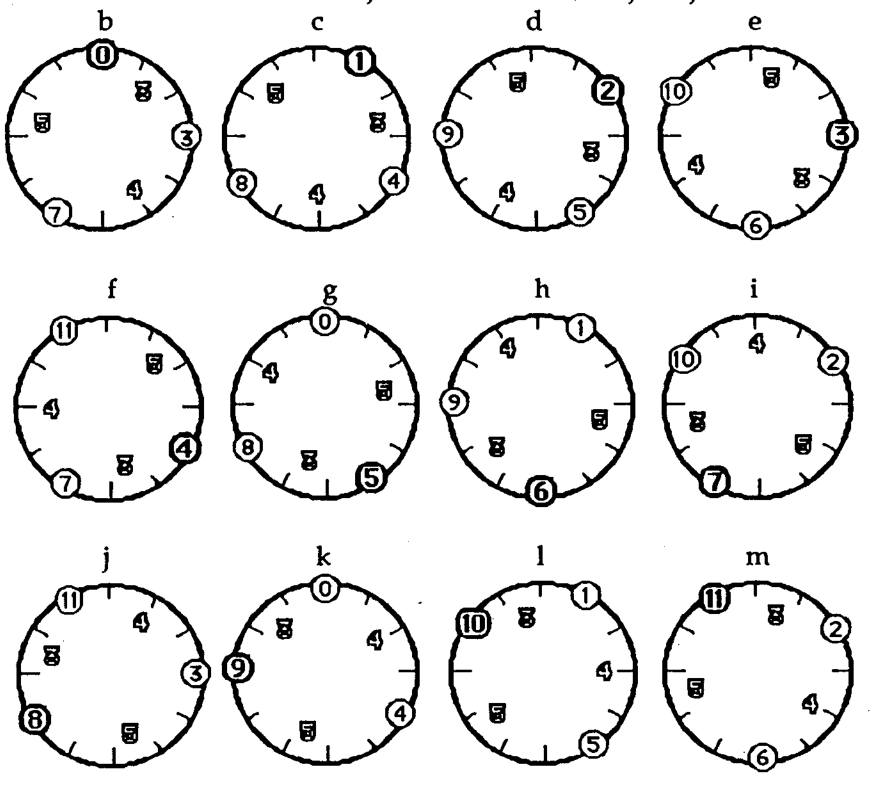
Esim. 5 a



Tämäntyyppisissä tilanteissa on luontevinta valita jäsenjoukkokierron aloitusjoukoksi vertailtava joukko itse, siis sama joukko toiseen kertaan. Vertailtava joukkohan tulee joka tapauksessa tutkittua aina myös itsensä kanssa, aloitettiinpa jäsenjoukkokierto mistä joukosta tahansa.

Esimerkki 5: tehtävänä on selvittää joukkoluokan 3-11 A jäsenjoukkojen leikkausten koot. Sekä vertailtavaksi joukoksi että jäsenjoukkokierron aloitusjoukoksi valitaan 3-11 A/0. (Esim.5 a, edell. sivu).

Esim.5 b-m: joukkoluokan 3-11 A jäsenjoukot.



Esimerkki 6: esimerkin 5 leikkauksista muodostuva vektori

Esim.6

3	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Joissakin tapauksissa saattavat sekä vertailtava joukko että jäsenjoukkokierron aloitusjoukko valikoitua itsestään tietyn tehtävänasettelun vuoksi. Käytännössä on kuitenkin niin, että tietystä tilanteesta valikoituneet kaksi joukkoa voivat kumpikin yhtä hyvin toimia sekä vertailtavana joukkona että jäsenjoukkokierron aloitusjoukkona. Jos jostakin asetelmasta valikoituvat vaikkapa joukot 3-11 B/0 ja 3-11 A/6, voidaan muodostaa leikkausvektorit pitäen 3-11 B/0:a vertailtavana joukkona ja 3-11 A/6:tta jäsenjoukkokierron aloitusjoukkona, sekä päinvastoin.

Esimerkki 7: 3-11 B/0 on vertailtava joukko ja 3-11 A/6 jäsenjoukkokierron aloitusjoukko. Leikkausvektori on kohdassa 7 a. Päinvastaisessa tilanteessa 3-11 B/6 on vertailtava joukko ja 3-11 B/0 jäsenjoukkokieron aloitusjoukko. Leikkausvektori on kohdassa 7 b.

Esim. 7 a

0	1	0	2	0	0	2	1	0	0	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 7 b

0	1	2	0	0	1	2	0	0	2	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kuten näkyy, se kumpi käsillä olevista joukoista valitaan vertailtavaksi joukoksi ja kumpi jäsenjoukkokierron aloitusjoukoksi, vaikuttaa tietyllä tavalla lopputulokseen. Tähän palataan myöhemmin.

4.1.2. X- JA Y-JOUKOT

Koottaessa vektoriin joukkoluokan jäsenjoukkojen keskinäiset leikkaukset tai kahden joukkoluokan jäsenjoukkojen väliset leikkaukset tarvitaan siis asetelmasta riippumatta aina kaksi kappaletta joukkoja - kaksi eri joukkoa tai yksi ja sama joukko kahdesti - jotka määrittävät lähtötilanteen. Toinen on vertailtavana joukkona ja toinen osoittaa jäsenjoukkokierron alkukohdan.

Selvyyden vuoksi olen antanut vertailtavalle joukolle nimityksen X-joukko ja jäsenjoukkokierron aloitusjoukolle nimen Y-joukko. Näillä tarkoituksellisesti mahdollisimman neutraaleilla nimillä ei ole sinänsä mitään erityistä merkitystä tai vaikutusta operaatioihin, sillä kumpi tahansa kahdesta joukosta voi toimia sekä X:nä että Y:nä. Kussakin yksittäisessä leikkausvektorioperaatiossa on jommankumman kuitenkin aina pysyttävä paikallaan vertailtavana joukkona. Tuo joukko on siten operaation ajan X ja toinen joukko operaation ajan Y.

4.1.3. LEIKKAUSVEKTORITYYPIT

Termi leikkausvektori on antamani yhteisnimitys useille toisistaan hieman poikkeaville vektoreille. Tarkkaa englanninkielistä vastinetta en ole nähnyt, mutta Regenerin termi *common-note vector*, "yhteisten nuottien vektori" viittaa samaan asiaan.[6] Myös Lewinin *interval function* kuvaa leikkausten kokoa vertailtavan joukon ja jonkin joukkoluokan välillä, vaikka kysymyksenasettelu lähteekin hiukan toiselta suunnalta.[7]

Kunkin leikkausvektorin tyyppi määräytyy sen mukaan, mikä on X- ja Y-joukkojen edustamien joukkoluokkien ja edelleen joukkojen itsensä suhde.

Jos X ja Y kuuluvat samaan joukkoluokkaan ja ovat lisäksi sama joukko (kuten esimerkissä 5), nimitetään syntyvää vektoria seuraavassa *autokorrelaatiovektoriksi*. Sekä Regener että Lewin viittaavat tilanteeseen jossa tällainen vektori muodostuu ("self-partition function", "directed interval-content-vector", "interval function between [set] P and itself").

Tämän esityksen puitteissa autokorrelaatiovektorien erikoistapauksiksi mielletään vektorit, joissa X ja Y kuuluvat samaan joukkoluokkaan, mutta ovat eri jäsenjoukkoja. Näitä tapauksia kutsutaan yksinkertaisesti "eri X:n ja Y:n autokorrelaatiovektoreiksi". *Intervallivektorit* ovat toinen autokorrelaatiovektorien erikoistapausten ryhmä, tai kenties pikemminkin eräänlainen alalaji.[8] (Termien toistuvat viittaukset intervalleihin eivät ole erehdystä, vaikka käsittelyn alla onkin leikkauksen käsite. Intervallisisällön ja leikkauksen välillä vallitsevat tietyt lainalaisuudet, joita käsitellään tuonnempana kohdassa 4.2.: *joukon kokonaisintervallisisällöstä*).

Jos X ja Y kuuluvat eri joukkoluokkiin, on kyseessä *ristikorrelaatiovektori.*

Tämän vektorityypin erikoistapauksina käsitellään *TICS-vektoreita* (lyhenne sanoista T_nI-Common-Tone Structure), joissa X ja Y kuuluvat *käänteisjoukkoluokkiin* ja ovat lisäksi toistensa käännökset akselin 0-6 suhteen.[9]

Toisen ristikorrelaatiovektorien lajin muodostavat tapaukset, joissa X ja Y kuuluvat joukkoluokkiin, jotka eivät ole toistensa käänteisjoukkoluokkia. Kaikkiin mainittuihin vektorityyppeihin palataan tuonnempana lähemmin.

4.1.4. VEKTORIEN KÄSITTELY JOUKKOTEOREETTISESSA KIRJALLISUUDESSA

Leikkausvektoreita, niiden ominaisuuksia ja eräitä niihin läheisesti liittyviä muita seikkoja on joukkoteoreettisessa kirjallisuudessa käsitelty suhteellisen paljon. Useimmille aihepiiriin liittyville teksteille on ominaista joko suuri yleisyys tai suuri yksityiskohtaisuus.

Edellisissä tapauksissa joukkoteoriaan perehtyvän voi ensialkuun olla vaikea saada käsitys siitä, minkälaisiksi osiksi kokonaisuus jakautuu ja mitkä lukuisista käsitteistä tarkoittavat samoja asioita, mitkä samantapaisia asioita ja mitkä eri asioita.

Jälkimmäisissä tapauksissa taas voi käydä päinvastoin. Yksittäiset vektorioperaatiot eivät tuota ongelmia, mutta niistä yhdessä muodostuva kokonaisuus ei välttämättä avaudu kädenkäänteessä.

Lisäksi aiheutuu kitkaa siitä, että leikkausvektorit ovat verraten työläitä muodostaa. Esimerkeissä 2 ja 5 nähtiin eräs tapa niiden ratkaisemiseksi. X-joukko sekä Y-joukon edustaman joukkoluokan kaikki jäsenjoukot sijoitettiin sävelluokkaympyröille, jonka jälkeen selvitettiin X:n yhteisten jäsenten määrä kunkin Y:n edustaman joukkoluokan jäsenjoukon kanssa. Tämä nimenomainen tapa tai muut yhtä monivaiheiset metodit vievät usein toistettuna niin paljon aikaa, että niiden hyödyntäminen esim. analyysitilanteessa ei tule kysymykseen. Tämän vuoksi on pyrittävä löytämään nopeampia menetelmiä.

Useimmissa vektoreita käsittelevissä teksteissä ei näkökulmien yleisluontoisuuden vuoksi operaatioiden erilaisia mahdollisia ratkaisutapoja, saati niiden nopeutta tai hitautta, sivuta lainkaan. Joitakin varsin käyttökelpoisia metodeja toki siitä huolimatta löytyy, kuten Rahnin intervalli- ja TICS-vektorien muodostusmenetelmät[10], sekä ns. *vakiomatriisi* [11] (invariance matrix).

Tämän esityksen puitteissa leikkausvektoreita kohtaan tuntemani kiinnostus liittyy etupäässä juuri nopeuteen tähtääviin menetelmiin. Vektoreiden olemukseen liittyviä lainalaisuuksia ja muita taustatietoja olen luonnollisesti liittänyt myös mukaan, mutta tällöin on usein kysymys informaatiosta, joka on löydettävissä myös muista lähteistä.

Vektorien muodostamiseksi kehittämäni metodit tähtäävät kahtaalle. Yhtäältä olen pyrkinyt etsimään erityyppisiä menetelmiä, jotka olisivat nopeampia kuin tähänastiset. Toisaalta olen halunnut myös muotoilla yhden yksittäisen menetelmän, jonka puitteissa jokainen leikkausvektori voitaisiin tapauksesta riippumatta muodostaa "yksisssä kehyksissä", mahdollisimman yhdenmukaisena toimenpiteenä.

Jälkimmäistä aspektia varten syntyivät *leikkausmatriisit,* edellistä varten taas joukko tuonnempana esiteltäviä toimenpiteitä, joista voi valita kulloiseenkin tehtävänasetteluun soveltuvimman.

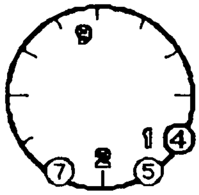
4. 2. MATRIISIT

Leikkausmatriisista on olemassa on kaksi versiota, joista tarkastellaan ensiksi suppeampaa. Vektorityyppien nimitysten tavoin kutsutaan saman X:n ja Y:n matriisia autokorrelaatiomatriisiksi ja eri X:n ja Y:n matriisia ristikorrelaatiomatriisiksi. Toimenpidettä varten tarvitaan tieto intervallikoista ja normaalijäsenten numeroarvoista sekä X:n että Y:n osalta.

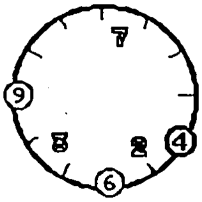
4.2.1. SUPPEAMPI LEIKKAUSMATRIISI

Esimerkki 8: X:ksi määritellään joukko -129-/4 eli 3-2 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}. (a-kohta). Y:ksi määritellään joukko -237-/4 eli 3-7 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}. (b-kohta). Tehtävänä on muodostaa eri joukkoluokkiin kuuluvien X:n ja Y:n ristikorrelaatiomatriisi ja selvittää sen avulla joukkoluokkien leikkausvektori.

Esim: 8 a

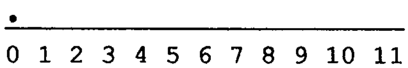


8 b

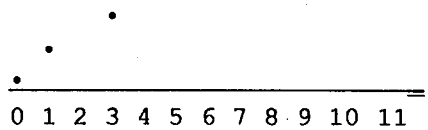


Matriisin muodostaminen tapahtuu seuraavasti. Ensiksi X:n normaalijäsenen numeroarvosta, tässä tapauksessa 4, vähennetään Y:n normaalijäsenen numeroarvo, sekin tässä tapauksessa 4. Erotus on 0. Tämän jälkeen jokin sopiva merkki, vaikkapa piste •, sijoitetaan vektorin indeksirivin kaltaisen 12-paikkaisen kuvion siihen indeksiin, jonka numeroarvo vastaa normaalijäsenten erotuksen numeroarvoa. Ensimmäinen •-merkki sijoittuu siis indeksiin 0. (Esim. 9 a). Ensimmäisestä merkistä alkaen matriisiin sijoitetaan lisää •-merkkejä X:n intervallikon, tässä tapauksessa -129-, jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Toinen merkki tulee indeksiin 0+1=1 (nolla on edell. merkin indeksi ja 1 intervallikon ensimmäinen jäsen). Kolmas merkki tulee indeksiin 1+2=3 (ykkönen on edell. merkin indeksi ja kakkonen intervallikon toinen jäsen). Intervallikon viimeinen jäsen 9 määrittää merkin indeksiin 3+9=0 (kolmonen on edell. merkin indeksi). Intervallikon viimeistä intervallia ei kuitenkaan tarvitse huomioida, koska se määrittää merkin aina normaalijäsenten numeroarvojen erotusta vastaavaan indeksiin, jossa on jo merkki. Merkit sijoitetaan *eri riveille.* Tähänastinen tilanne on kuvattu esimerkissä 9 b).

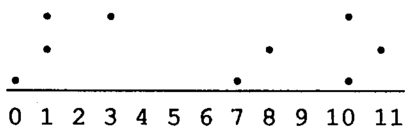
Esim. 9 a



Esim. 9 b



Esim. 9 c



Tämän jälkeen sijoitetaan kustakin •-merkistä lähtien samalle vaakariville lisää merkkejä *Y-joukon* intervallikon jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Toimenpide suoritetaan *oikealta vasemmalle.* Y:n intervallikko on -237-.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (alimmalla vaakarivillä olevasta) indeksistä 0 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 10. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 10 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 7.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (keskimmäisellä vaakarivillä olevasta) indeksistä 1 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 11 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 8.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (ylimmällä vaakarivillä olevasta) indeksistä 3 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 1. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 1 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 10.

Esimerkissä 9 c) näkyy valmis matriisi. Indeksissä n päällekkäin olevien •-merkkien yhteenlaskettu määrä osoittaa yhteisten jäsenten määrän X-joukon {4,5,7} ja Y-joukon {4,6,9} n:nen transposition välillä. (Transposition normaalijäsenen numeroarvo ja edelleen jäsenjoukon numero on 4+n). Tällaisesta matriisista on lyhyt matka luvun aiemmissa esimerkeissä käytettyihin vektoreihin, sillä vektori muodostetaan matriisista vain merkitsemällä indekseissä olevien merkkien lukumäärät numeroin. (Esim. 9 d). Tämä toimenpide ei pienten joukkojen kyseessäollessa ole välttämätön, mutta suuria joukkoja 'tutkittaessa, jolloin merkkejä on paljon, lienee selvintä koota tulos aina vektoriksi.

Esim. 9 d: kohdan 9 c matriisista johdettu leikkausvektori

1	2	0	1	0	0	0	1	1	0	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

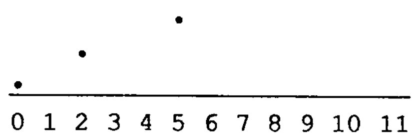
Esimerkissä 9 ensimmäinen •-merkki sijoitettiin indeksiin 0, koska X- ja Y-joukkojen normaalijäsenten erotus oli nolla. On helppo huomata, että erotus 0 on mahdollista muodostaa monesta muustakin tapauksesta. Jos joukkoluokan 3-2 A n:s jäsenjoukko valitaan vertailtavaksi X-joukoksi ja joukkoluokan 3-7 A n:s jäsenjoukko jäsenjoukkokierron aloittavaksi Y-joukoksi, on niiden normaalijäsenten erotus 0 kaikilla n:n arvoilla. Näitä "n-pareja" on siis 12 kappaletta. Ne tuottavat kaikki samanlaisen matriisin kuin esimerkissä 9 c, ja edelleen samanlaisen leikkausvektorin kuin esimerkissä 9 d. Lähtötilanteen muodostavien joukkojen normaalijäsenten numeroarvoilla sinänsä ei ole merkitystä, ainoastaan niiden erotuksilla.

Vastaavasti kahdessatoista tapauksessa X- ja Y-joukoiksi valittavien joukkojen normaalijäsenten numeroarvojen erotus on 1. Nämä tapaukset tuottavat keskenään identtiset vektorit jne. Useimmissa tapauksissa kahden joukkoluokan välille muodostuu erilaisia vektoreita 12 kappaletta, ja kukin vektori on yhteinen kahdelletoista X/Y-lähtötilanteelle. Yhteensä 144 lähtötilannetta. Esimerkin 4 perusteella jo tiedetään, että kaikki 12 erilaista vektoria ovat toistensa rotaatioita.

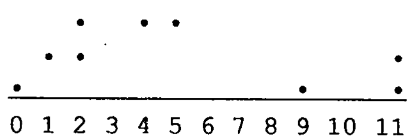
4.2.1.1. X:n ja Y:n vaihtaminen

Esimerkin 7 yhteydessä todettiin, että kaksi eri joukkoa mahdollistaa kaksi eri leikkausvektoriasetelmaa, kun kumpikin joukoista voi toimia sekä X-joukkona että Y-joukkona. Seuraavassa esimerkissä on esimerkin 9 asetelma päinvastaisena.

Esim 10 a



10 b



Esimerkki 10: X-joukko on 3-7 A/4 eli -237-/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}. Y-joukko on 3-2 A/4 eli -129-/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}.

Normaalijäsenten välinen erotus on tässä tapauksessa sama kuin toisinkin päin, nolla. Kun •-merkkejä sijoitetaan nollasta käsin eri riveille X-joukon intervallikon -237- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, asettuvat merkit indekseihin 0, 2 ja 5. Tähänastinen tilanne on kuvattuna esimerkissä 10 a. (Edell. sivu).

Kustakin merkistä lähtien vaakariveille sijoitetaan lisää merkkejä Y-joukon intervallikon -129- määrittämiin indekseihin. Suuntana jälleen oikealta vasemmalle.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (alimmalla vaakarivillä olevasta) indeksistä 0 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 11 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 9.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (keskimmäisellä vaakarivillä olevasta) indeksistä 2 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 1. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 1 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (ylimmällä vaakarivillä olevasta) indeksistä 5 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 4. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 4 vasemmalle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 2.

Valmis matriisi on nähtävissä esimerkissä 10 b.

Esimerkissä 11 a-b ovat rinnakkain päinvastaisten X/Y-asetelmien tuottamat vektorit. Kohdassa a on esimerkin 9 d vektori ja kohdassa b esimerkin 10 b matriisista johdettu leikkausvektori.

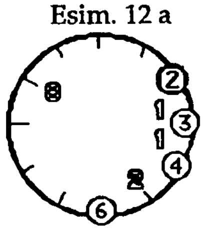
Esim. 11 a

1	2	0	1	0	0	0	1	1	0	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

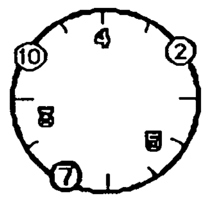
Esim. 11 b

1	1	2	0	1	1	0	0	0	1	0	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 12 a



12 b



Esimerkistä 11 voidaan huomata, että a-kohdassa indeksien 1-11 komponentit muodostavat numerojonon, joka on käänteinen verrattuna b-kohdan vastaavaan. 0. komponentti on luonnollisesti molemmissa sama, sillä se kuvaa kummassakin tapauksessa samojen joukkojen leikkausta. Nämä seikat pätevät kaikkiin tapauksiin, joissa X ja Y ovat eri joukkoja. Molempia lähtöasetelmia ei siis ole välttämätöntä suorittaa. Riittää, kun selvittää vaihtoehdoista toisen ja lukee indeksien 1-11 komponentit sekä vasemmalta oikealle että oikealta vasemmalle. (Ks. myös esim. 7 a-b).

Esimerkki 12: Toinen esimerkki X:n ja Y:n vaihtamisesta. Vaihtoehdossa 1) X on joukko 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}. (Esim. 12 a, edell. sivu). Y on joukko 3-11 A/7 eli -345-/7, sävelluokkasisällöltään {7,10,2}. (Esim. 12 b).

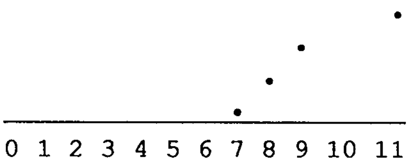
Vaihtoehdossa 2) joukko 3-11 A/7 on X ja joukko 4-2 A/2 on Y.

Vaihtoehdossa 1) on X:n ja Y:n normaalijäsenten erotus 2-7=-5=7.

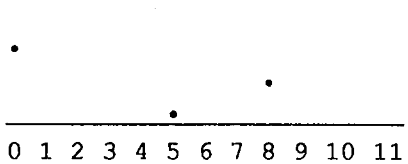
•-merkit sijoitetaan normaalijäsenten erotusta vastaavasta indeksistä 7 käsin eri riveille X-joukon intervallikon -1128- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Merkit asettuvat indekseihin 7,8,9 ja 11. Tähänastinen tilanne on kuvattuna esimerkissä 13 a. Kustakin •-merkistä lähtien sijoitetaan samalle vaakariville lisää merkkejä Y-joukon intervallikon -345- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, oikealta vasemmalle edeten. Valmis matriisi on esimerkissä 14 a ja siitä johdettu vektori esimerkissä 14 c.

Vaihtoehdossa 2) on X:n ja Y:n normaalijäsenten erotus 7-2=5. •-merkit sijoitetaan indeksistä 5 käsin X-joukon intervallikon -345- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, jolloin ne asettuvat indekseihin 5,8 ja 0. Tähänastinen tilanne on esimerkissä 13 b. Muut merkit sijoitetaan samoille vaakariveille Y-joukon intervallikon -1128- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, oikealta vasemmalle edeten. Valmis matriisi on esimerkissä 14 b ja siitä johdettu vektori esimerkissä 14 d.

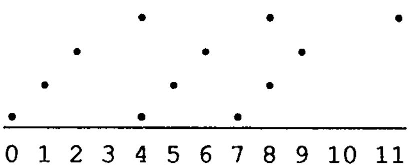
Esim. 13 a



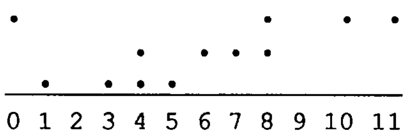
Esim. 13 b



Esim. 14 a



Esim. 14 b



Esim. 14 c

1	1	1	0	2	1	1	1	2	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 14 d

1	1	0	1	2	1	1	1	2	0	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

14 c-kohdan indeksien 1-11 komponentit muodostavat käänteisen numerojonon verrattuna 14 d-kohdan vastaaviin.

4.2.1.2. käänteisvektorit

Usein on tarpeen tutkia X-joukon leikkaukset paitsi Y-joukon edustaman joukkoluokan, myös sen käänteisjoukkoluokan kanssa. Tämän toimenpiteen voi tietysti suorittaa siten, että selvittää Y:n joukkoluokan käänteisjoukkoluokan, valitsee jonkin sen jäsenjoukoista uudeksi Y-joukoksi, aloittaa jäsenjoukkokierron siitä ja selvittää leikkausvektorin edellisissä esimerkeissä kuvatulla tavalla.

On kuitenkin myös mahdollista selvittää käänteisjoukkoluokan leikkausvektori suoraan *alkuperäisestä* Y:stä. Toimenpide suoritetaan siis saman X:n ja Y:n välillä kuin "normaali" leikkausvektori, mutta itse asiassa tullaan tutkineeksi vektori jonka X:nä on alkuperäinen X ja Y:nä joukko, joka on alkuperäisen Y:n *käännös akselin 0-6 suhteen.* Operaatio on niin automaattinen, että välttämättä ei tarvitse edes tietää, mikä nimenomainen joukko tuo akselin 0-6 suhteen käännetty Y-joukko eli *käänteis-Y* on.

Seuraavassa X-joukon ja Y:n edustaman joukkoluokan leikkauksia kuvaavaa vektoria nimitetään *transpositiovektoriksi.* Y-joukon avulla johdettavaa, mutta todellisuudessa X-joukon ja Y:n käännöksen edustaman joukkoluokan leikkauksia kuvaavaa vektoria nimitetään vastaavasti *käänteisvektoriksi.*

4.2.1.3. käänteisjoukon valinnasta

Voidaan tietysti pohdiskella, miksi Y:n edustaman joukkoluokan käänteisjoukkoluokasta valitaan käänteis-Y:ksi juuri se jäsenjoukko, joka muodostuu käännettäessä Y akselin 0-6 suhteen. Muitakin luontevia mahdollisuuksia olisi käsillä.

Esimerkiksi voitaisiin ajatella, että käänteis-Y:ksi valittaisiin aina joukko, joka syntyy kun Y käännetään normaalijäsenensä määrittämän akselin suhteen. Täten valikoituneen käänteis-Y:n normaalijäsenen numeroarvo olisi aina yhtä kuin Y:n normaalijäsenen numeroarvo + intervallikon vakioosan numeroarvo.

Tai yhtä hyvin voitaisiin käänteisjoukkoluokasta valita Y:n vastinjoukko, siis saman normaalijäsenen numeroarvon omaava jäsenjoukko. Näissä vaihtoehdoissa olisi Y:n ja käänteis-Y:n toisikseen kääntyvien jäsenten etäisyys toisistaan aina vakio ja akseli tilanteen mukaan vaihtuva. Akselin 0-6 suhteen käännettäessä asetelma on päinvastainen, akseli on lyöty lukkoon, Y:n ja käänteis-Y:n toisikseen kääntyvien jäsenten välimatkan vaihdellessa.

Y:n ja käänteis-Y:n lukkoonlyödyn välimatkan hyötyä voisi valaista esim. seuraavalla esimerkillä. Jos mielivaltaisesta (epäsymmetrisestä t. 1-akselisesti symmetrisestä) joukkoluokasta muodostettaisiin 12 transpositiovektoria siten, että jokainen jäsenjoukko olisi vuorollaan yhtäaikaisesti sekä X että Y, olisivat kaikki kaksitoista syntyvää vektoria tietenkin keskenään identtiset.

Jos tämän jälkeen kussakin tapauksessa Y:n tilalle sijoitettaisiin sen käännös akselin 0-6 suhteen ja suoritettaisiin kaikki kaksitoista vektorioperaatiota uudestaan, syntyisi useimpien joukkoluokkien tapauksissa *kuusi* eri vektoria. (Vektorit olisivat toistensa rotaatioita). Eri jäsenjoukkojen leikkausten koot akselin 0-6 suhteen käännettyjen käänteisjoukkojensa ja niistä aloitettujen jäsenjoukkokiertojen kanssa eivät suinkaan pysy vakiona.

Jos sensijaan käänteis-Y:ksi valittaisiin esim. kulloisenkin alkuperäisen Y:n vastinjoukko, tuottaisivat 12 operaatiota jälleen 12 keskenään identtistä vektoria.

Näistä huomioista huolimatta olen päättänyt käyttää käänteis-Y:nä nimenomaan akselin 0-6 suhteen käännettyä Y:tä, kahdesta syystä. Ensinnäkin, kysymys ei loppujen lopuksi ole niin suuresta asiasta, että sen vuoksi olisi ehdoin tahdoin kannattanut poiketa joukkoteoreettisen kirjallisuuden yleisestä käytännöstä - jokin käänteisjoukkohan on joka tapauksessa aina valittava.

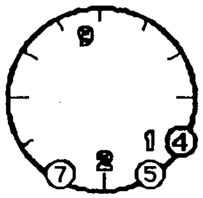
Toiseksi, akselin 0-6 suhteen kääntämisellä on se hyvä puoli, että toimenpide voidaan suorittaa useilla erilaisilla ja varsin kätevillä tavoilla. Vaivattomuus sai ratkaista.

4.2.1.4. käänteismatriisit

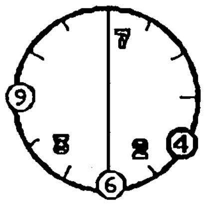
Käänteisvektorit voidaan selvittää leikkausmatriisien avulla. Tällaisissa toimenpiteissä syntyviä matriiseja kutsutaan seuraavassa *käänteismatriiseiksi*. Aiempien esimerkkien transpositiovektoreihin liittyvät matriisit ovat vastaavasti *transpositiomatriiseja*.

Esimerkki 15: esimerkissä 8 X-joukko oli -129-/4 eli 3-2 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}. (Esim. 15 a). Y-joukko oli -237-/4 eli 3-7 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}. (15 b). Tehtävänä on tällä kertaa käänteismatriisin ja edelleen käänteisvektorin muodostaminen samoista joukoista. Akselin 0-6 suhteen kääntämällä Y:stä muodostuu joukko -327-/3 eli 3-7 B/3, sävelluokkasisällöltään {3,6,8}. (Esim. 15 c). Kuten sanottu, toimenpiteen suorittamisen kannalta tätä tietoa ei tarvita. Käänteisakseli 0-6 merkitty kohtiin b ja c.

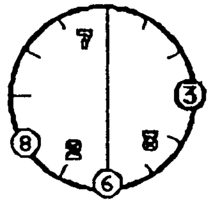
Esim. 15 a



15 b

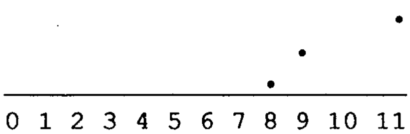


15 c

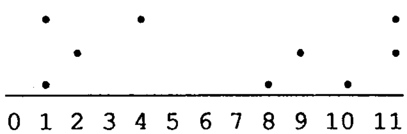


Toimenpide on lähes samanlainen kuin transpositiovektorin muodostaminen. Aluksi tarvitaan tieto X:n ja Y:n normaalijäsenten numeroarvoista. Mutta nyt Y:n numeroarvoa (tässä tapauksessa 4) ei vähennetä X:n numeroarvosta (myöskin 4), vaan se *lisätään* siihen. 4+4=8.

Esim.16 a



Esim.16 b



Tämän jälkeen sijoitetaan •-merkkejä normaalijäsenten summaa vastaavan numeroarvon omaavasta indeksistä 8 käsin eri riveille X-joukon intervallikon -129- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Merkit asettuvat indekseihin 8, 9 ja 11. Tähänastinen tilanne on kuvattuna esimerkissä 16 a. (Edell. sivu).

Kustakin •-merkistä lähtien sijoitetaan samalle vaakariville lisää merkkejä Y-joukon intervallikon -237- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Toimenpide suoritetaan nyt toiseen suuntaan kuin transpositiovektorien tapauksissa, *vasemmalta oikealle.*

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (alimmalla vaakarivillä olevasta) indeksistä 8 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 10. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 10 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 1.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (keskimmäisellä vaakarivillä olevasta) indeksistä 9 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 11 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 2.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää (ylimällä vaakarivillä olevasta) indeksistä 11 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 1. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää indeksistä 1 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 4.

Valmis käänteismatriisi on esimerkissä 16 b. Matriisista johdettu vektori on esimerkissä 16 c.

Esim. 16 c

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Indeksin n komponentti ilmaisee X-joukon ja käänteis-Y:n (akselin 0-6 suhteen käännetyn Y:n) n:nen transposition leikkauksen koon. Jos Y-joukkoa merkitään T_0Y:ksi, on käänteis-Y tällöin T_0IY ja sen n:s transpositio vastaavasti T_nIY.

Mikäli kääntäminen merkitään käänteisakseleita hyväksikäyttäen, ilmaisee käänteisvektorin indeksin n numeroarvo *jaettuna kahdella* toisen kiintopisteen numeroarvon siitä akselista, jonka suhteen Y-joukko on käännetty. $T_nIY = I^{n/2}Y$.

Sama toisinpäin: X-joukon ja akselin a-(a+6) suhteen käännetyn Y-joukon leikkauksen koko näkyy käänteisvektorin komponentissa, jonka indeksin numeroarvo on akselin valinnaisen kiintopisteen numeroarvo *kerrottuna kahdella.*[12] $I^aY = T_{2a}IY$.

Esimerkin 16 käänteisvektorissa indeksin 0 komponentti ilmaisee X-joukon {4,5,7} ja akselin 0-6 suhteen käännetyn Y-joukon leikkauksen koon. Käännettäessä Y-joukosta {4,6,9} tulee joukko {3,6,8}. Jos {4, 6,9} = T_0Y, niin {3,6,8} = T_0IY.

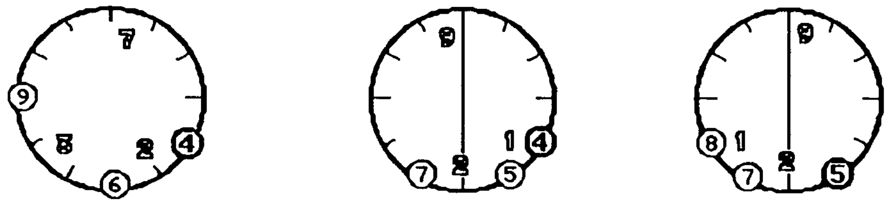
Indeksin 1 komponentti ilmaisee X-joukon {4,5,7} sekä yhdellä puolisävelluokka-askeleella transponoidun käänteis-Y:n leikkauksen koon. Transponoitu käänteis-Y (käännetty ja transponoitu Y) on {4,7,9}. Jos {4,6,9} = T_0Y, niin {4,7,9} = T_1IY. Toisin merkittynä $I^{1/2}$ {4,6,9} = {4,7,9}.

Indeksin 2 komponentti ilmaisee X-joukon {4,5,7} sekä kahdella puolisävelluokka-askeleella transponoidun käänteis-Y:n leikkauksen koon. Transponoitu käänteis-Y on {5,8,10}. Jos {4,6,9} = T_0Y, niin {5,8,10} = T_2IY. Toisin merkittynä I^1 {4,6,9} = {5,8,10}.

4. 2.1.5. X:n ja Y:n vaihtaminen käänteismatriiseissa

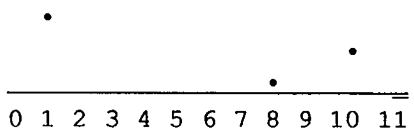
Esimerkissä 17 on esimerkkien 15-16 asetelma päinvastaisena. Joukko {4,6,9} on X (esim.17 a) ja joukko {4,5,7} on Y (esim.17 b). Kohdassa 17 c on joukko 3-2 B/5 eli -219-/5, sävelluokkasisällöltään {5,7,8}, joka syntyy käännettäessä Y-joukko akselin 0-6 suhteen.

Esim 17 a 17 b 17 c

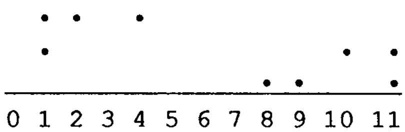


Normaalijäsenten summa on luonnollisesti sama kuin toisinkin päin eli 8. •-merkit sijoitetaan indeksistä 8 käsin eri riveille X-joukon intervallikon -237- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, jolloin ne asettuvat indekseihin 8, 10 ja 1. Tähänastinen tilanne on esimerkissä 18 a.

Esim. 18 a



Esim. 18 b



Kustakin •-merkistä lähtien sijoitetaan samalle vaakariville lisää merkkejä Y-joukon intervallikon -129- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, vasemmalta oikealle edeten.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (alimmalla vaakarivillä olevasta) indeksistä 8 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 9. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 9 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (keskimmäisellä vaakarivillä olevasta) indeksistä 10 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 11. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 11 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 1.

Intervallikon -129- ensimmäinen jäsen 1 määrittää (ylimmällä vaakarivillä olevasta) indeksistä 1 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 2. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää indeksistä 2 oikealle päin mentäessä samalle vaakariville merkin indeksiin 4.

Valmis käänteismatriisi on esimerkissä 18 b. Siitä johdettu vektori on esimerkissä 18 c.

Esim.18 c

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkissä 19 a-b ovat rinnakkain esimerkkien 16 ja 18 päinvastaisten X/Y-asetelmien tuottamat vektorit.

Esim.19 a

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

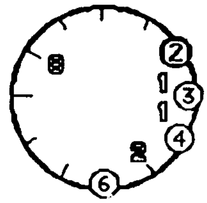
Esim.19 b

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

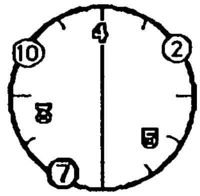
Vektorit ovat identtiset. Tämä seikka pätee kaikkiin tapauksiin. Käänteisvektoreita muodostettaessa X:n ja Y:n vaihtaminen toisikseen ei muuta lopputulosta.

Esimerkki 20: Toinen näyte X:n ja Y:n vaihtamisesta käänteisvektoria muodostettaessa. Käsiteltävät joukot ovat samat kuin esimerkissä 12 a-b. Vaihtoehdossa 1) X-joukko on 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}. (Esim. 20 a). Y-joukko on 3-11 A/7 eli -345-/7, sävelluokkasisällöltään {7,10,2}. (20 b). Akselin 0-6 suhteen käännetty Y on joukko 3-11 B/10 eli -435-/10, sävelluokkasisällöltään {10,2,5}. (Esim. 20 c).

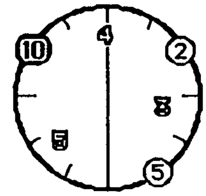
Esim. 20 a



20 b

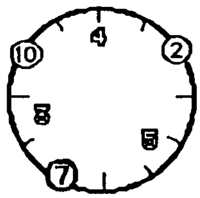


20 c

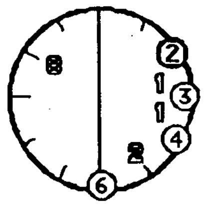


Vaihtoehdossa 2) X-joukko on {7,10,2} (esim. 20 d) ja Y-joukko on {2,3,4,6}. (Esim. 20 e). Akselin 0-6 suhteen käännetty Y on joukko 4-2 B/6 eli -2118-/6, sävelluokkasisällöltään {6,8,9,10}. (Esim.20 f).

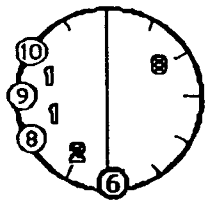
Esim.20 d



20 e



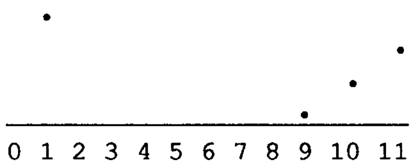
20 f



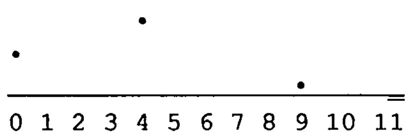
Vaihtoehdossa 1) on X:n ja Y:n normaalijäsenten summa 2+7=9. Kun X:n intervallikon -1128- avulla ohjataan •-merkkien sijoittumista eri vaakariveille indeksistä 9 alkaen, päätyvät merkit indekseihin 9,10, 11 ja 1. Tähänastinen tilanne on kuvattuna esimerkissä 21 a. Seuraavaksi sijoitetaan vaakariveille lisää merkkejä Y:n intervallikon -345- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, suuntana oikea. Valmis matriisi on esimerkissä 21 c.

Vaihtoehdossa 2) on X:n ja Y:n normaalijäsenten summa sama kuin äsken, 7+2=9. Kun X:n intervallikon -345- avulla ohjataan •-merkkien sijoittumista eri vaakariveille indeksistä 9 alkaen, päätyvät merkit indekseihin 9, 0 ja 4. Tähänastinen tilanne on kuvattuna esimerkissä 21 b. Tämän jälkeen sijoitetaan vaakariveille lisää merkkejä Y:n intervallikon -1128- jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan, suuntana oikea. Valmis matriisi on esimerkissä 21 d.

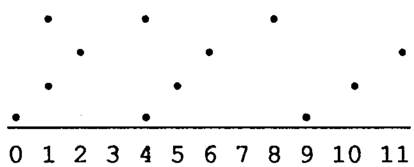
Esim.21 a



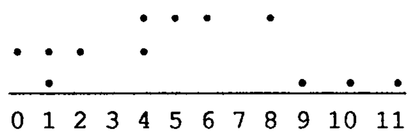
Esim.21 b



Esim.21 c



Esim.21 d



Esim. 21 e

1	2	1	0	2	1	1	0	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 21 f

1	2	1	0	2	1	1	0	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kohdissa 21 e ja f ovat kohtien 21 c ja d matriiseista johdetut vektorit. Ne ovat identtiset.[13]

4.2.2. LAAJEMPI LEIKKAUSMATRIISI

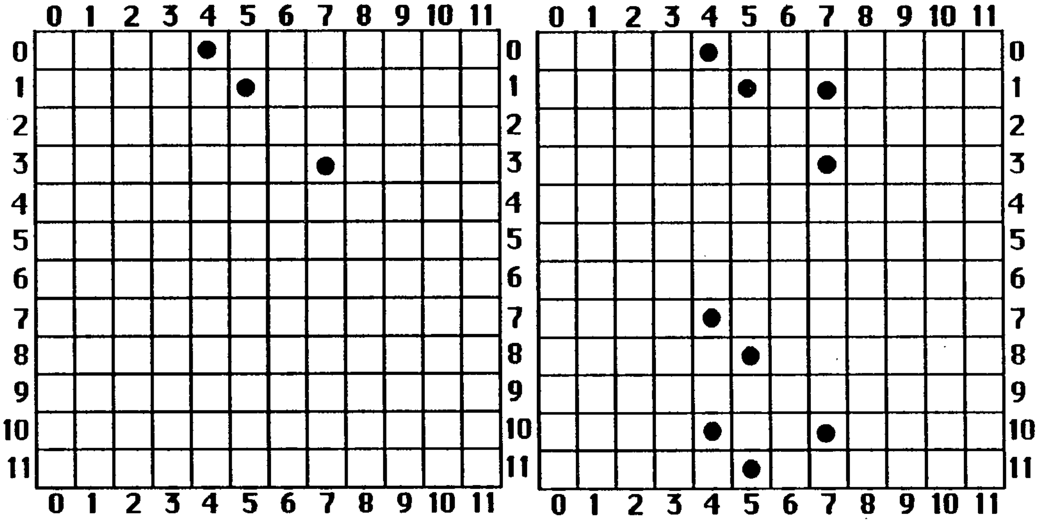
Edellisten esimerkkien matriisien ja niistä johdettujen vektorien avulla on saatu selville leikkauksen koko X-joukon ja kunkin Y:n edustaman joukkoluokan jäsenjoukon välillä. Sensijaan tietoa siitä, mistä nimenomaisista sävelluokista kukin leikkaus on muodostunut, ei suppeampi leikkausmatriisi paljasta. Koska tämäkin informaatio on usein tarpeellinen, tarkastellaan seuraavassa *laajempaa leikkausmatriisia,* josta myös leikkausten sävelluokat käyvät ilmi.

Matriisia varten tarvitaan samanlainen 12*12 ruudun ruudukko kuin instanssimatriisia varten. Perusasetelma on samantapainen kuin suppeammassa matriisissa, mutta ikäänkuin pystyyn nostettuna ja yhdellä uudella ulottuvuudella varustettuna.

4.2.2.1. transpositiomatriisit

Esimerkki 22: esimerkin 8 X- ja Y-joukoista muodostetaan laajempi leikkausmatriisi. X on -129-/4 eli 3-2 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}. Y on -237-/4 eli 3-7 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}.

Esim.22 a 22b



Todetaan X:n normaalijäsenen numeroarvo, tässä tapauksessa 4, ja etsitään ruutu joka on numerolla neljä merkittyjen *vaaka- ja pystyrivien leikkauskohdassa*. Ruudun koordinaatit ovat siis 4/4. Kauttaviivan vasemmalle puolelle merkitään vaakarivit, oikealle pystyrivit.

Y:n normaalijäsenen numeroarvo, tässä tapauksessa myöskin 4, vähennetään "X-ruudun" 4/4 *vaakarivin* numeroarvosta, pystyrivin numeroarvon säilyessä ennallaan. 4/4:stä tulee siten 0/4, joka viittaa koordinaatit 0/4 omaavaan ruutuun. (Muistisääntö: Y:n normaalijäsenen numeroarvoa vähennettäessä liikutaan X-ruudusta aina *pystyrivillä ylöspäin*).

Ensimmäinen •-merkki sijoitetaan ruutuun 0/4. Kuten suppeammankin matriisin alkuasetelmassa, myös nyt X:n intervallikko, tässä tapauksessa -129-, ohjaa muiden merkkien sijoittumista matriisiin.

Toinen •-merkki sijoitetaan ruutuun, jonka koordinaatit vastaavat 0/4 ruudun koordinaattien ja intervallikon ensimmäisen jäsenen numeroarvojen summia. Laskettaessa ykkönen vuoroin yhteen sekä nollan että nelosen kanssa valikoituu ruutu, joka on vaakarivin 1 ja pystyrivin 5 leikkauskohdassa.

Kolmas •-merkki sijoitetaan ruutuun, jonka koordinaatit vastaavat 1/5 ruudun koordinaattien ja intervallikon toisen jäsenen numeroarvojen summia. Laskettaessa kakkonen vuoroin yhteen sekä ykkösen että viitosen kanssa valikoituu ruutu, joka on vaakarivin 3 ja pystyrivin 7 leikkauskohdassa. Tähänastinen tilanne on kuvattu esimerkissä 22 a. (Edell. sivu).

Toimenpiteen jouduttamiseksi on olemassa oikotie. Kaikki •-merkin saavat ruudut osuvat aina sille vinoriville, joka lähtee normaalijäsenten erotuksen määrittämästä ruudusta *oikealle alas*. (Esimerkkitapauksessa ruudusta 0/4 ruutuun 7/11 ja jatkuen edelleen ruudukon toisella puolella ruudusta 8/0 ruutuun 11/3). Merkit voi sijoittaa normaalijäsenten erotuksen määrittämästä ruudusta suoraan tälle vinoriville, X:n intervallikon jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan.

Tämän jälkeen sijoitetaan kustakin •-merkistä alkaen *pystyriveille* lisää merkkejä Y:n intervallikon, tässä tapauksessa -237-, jäsenten osoittamien etäisyyksien päähän toisistaan. Toiminnan suunta on sama kuin normalijäsenten vähentämisen yhteydessä, *ylöspäin* eli kohden pienempiä numeroarvoja. (Vastaten suppeammassa leikkausmatriisissa vasemmalle menoa).

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 0/4 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 10/4. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 10/4 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 7/4.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 1/5 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 11/5. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 11/5 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 8/5.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 3/7 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 1/7. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 1/7 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 10/7.

Valmis matriisi on nähtävissä esimerkissä 22 b.

X-joukon ja Y-joukon n:nen transposition leikkauksen koko selviää laskemalla yhteen vaakarivillä n sijaitsevien •-merkkien määrä. Leikkauksen sävelluokkasisältö selviää katsomalla, millä *pystyriveillä* merkit sijaitsevat.

X-joukon ja Y-joukon (T_0Y) leikkaus sijoittuu aina 0. vaakariville. X:n ja T_1Y:n, esimerkkitapauksessa joukon -237-/5, leikkaus sijoittuu aina 1. vaakariville jne. Vaakarivin numero on myös transpositiointervallin numero. Vaakarivin numeron ja Y-joukon normaalijäsenen summa osoittaa, kuinka mones Y:n joukkoluokan jäsenjoukko on kyseessä.

Esimerkkimatriisin vaakariviltä nolla näkyy, että X-joukolla {4,5, 7} ja Y-joukolla {4,6,9} on yhteisenä jäsenenä sävelluokka 4. Vaakariveillä 4,5 ja 6 ei ole merkkejä lainkaan, joten Y:stä neljän, viiden ja kuuden puolisävelluokka-askeleen päässä olevilla jäsenjoukoilla {8,10,1} eli -237-/8 , {9,11,2} eli -237-/9 ja {10,0,3} eli -237-/10 (T_4Y, T_5Y ja T_6Y) ei ole yhteisiä sävelluokkia X-joukon kanssa. Vaakariveillä 1 ja 10 on kaksi merkkiä kummassakin, joten jäsenjoukoilla {5,7,10} eli -237-/5 ja {2,4,7} eli -237-/2 (T_1Y ja $T_{10}Y$) on kaksi yhteistä jäsentä X-joukon kanssa. Edellisessä tapauksessa yhteiset jäsenet ovat sävelluokat 5 ja 7, jälkimmäisessä 4 ja 7.

Matriisista voidaan myöskin nähdä suoraan, millä jäsenjoukoilla on yhteisenä jäsenenä X:n kanssa tietty sävelluokka. Esimerkiksi sävelluokka 5 on yhteisenä jäsenenä X:llä ja Y:stä yhden, kahdeksan ja yhdentoista puolisävelluokka-askeleen päässä olevilla jäsenjoukoilla {5,7,10} eli -237-/5, {0,2,5} eli -237-/0 ja {3,5,8} eli -237-/3 (T_1Y, T_8Y ja $T_{11}Y$). Jokainen X:n sävelluokka osallistuu leikkaukseen yhtä monta kertaa. Tämä pätee kaikkiin tapauksiin.

Laajemmasta leikkausmatriisista voidaan muodostaa vektori kirjoittamalla kunkin vaakarivin •-merkkien lukumäärä komponentiksi rivin numeroarvoa vastaavaan indeksiin.

Esimerkki 23: X/Y-asetelma on esimerkistä 12. X-joukko on 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}. Y-joukko on 3-11 A/7 eli -345-/7, sävelluokkasisällöltään {7,10,2}.

X:n normaalijäsenen numeroarvo on 2. Etsitään ruutu, joka on numerolla kaksi merkittyjen vaaka- ja pystyrivien leikkauskohdassa. Y:n normaalijäsenen numeroarvo 7 vähennetään ruudun vaakakoordinaatin numeroarvosta, jolloin päädytään ruutuun 7/2. (2-7=-5=7). Pystyrivin numeroarvon säilyessä ennallaan ensimmäinen •-merkki sijoitetaan ruutuun 7/2. X:n intervallikko -1128- ohjaa muiden merkkien sijoittumista.

Intervallikon ensimmäinen jäsen 1 määrittää ruudusta 7/2 käsin vaakariviksi 8 ja pystyriviksi 3 (7+1/2+1). Toinen •-merkki tulee ruutuun 8/3. Intervallikon toinen jäsen 1 määrittää ruudusta 8/3 käsin vaakariviksi 9 ja pystyriviksi 4 (8+1/3+1). Kolmas •-merkki ruutuun 9/4. Intervallikon kolmas jäsen 2 määrittää ruudusta 9/4 käsin vaakariviksi 11 ja pystyriviksi 6 (9+2/4+2). Neljäs •-merkki ruutuun 11/6. Tähänastinen tilanne on kuvattu esimerkissä 23 a

Esim. 23 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0													0
1													1
2													2
3													3
4													4
5													5
6													6
7			•										7
8				•									8
9					•								9
10													10
11							•						11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

23 b

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0			•										0
1				•									1
2					•								2
3													3
4			•				•						4
5				•									5
6					•								6
7			•										7
8				•			•						8
9					•								9
10													10
11							•						11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Tämän jälkeen sijoitetaan lisää merkkejä Y:n intervallikon -345- ohjaamana.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 7/2 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 4/2. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 4/2 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 0/2.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 8/3 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 5/3. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 5/3 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 1/3.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 9/4 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 6/4. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 6/4 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 2/4.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 11/6 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 8/6. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 8/6 ylöspäin mentäessä merkin ruutuun 4/6.

Valmis matriisi on kuviossa 23 b.

4.2.2.2. X:n ja Y:n vaihtaminen laajemmassa transpositiomatriisissa

Esimerkin 24 a matriisissa on käytetty samoja joukkoja kuin esimerkissä 22, mutta X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt X = {4,6,9} ja Y = {4,5,7}.

Esimerkin 24 b matriisissa puolestaan on käytetty samoja joukkoja kuin esimerkissä 23, mutta X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt X = {7,10,2} ja Y = {2,3,4,6}.

Esim.24 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0					●								0
1							●						1
2							●			●			2
3													3
4										●			4
5										●			5
6													6
7													7
8													8
9					●								9
10													10
11					●		●						11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

24 b

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0			●										0
1								●					1
2													2
3								●					3
4								●			●		4
5								●					5
6											●		6
7											●		7
8			●								●		8
9													9
10			●										10
11			●										11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Vertaamalla a-kohdan matriisia esimerkin 22 b-kohdan matriisiin ja b-kohdan matriisia esimerkin 23 b-kohdan matriisiin voidaan todeta, että vaakarivien 1-11 riveittäin yhteenlasketuista •-merkeistä muodostuvat komponenttien jonot ovat päinvastaiset. Mutta tämä yhtäläisyys koskee vain leikkausten *kokoja*, leikkausten *sävelluokkasisältöihin* se ei yllä. Jos 0. vaakarivejä lukuunottamatta matriisien numeroarvoiltaan komplementtisia rivejä verrataan ristiin (aiempien esimerkkien matriisien 1. vaakarivit verrattuna esimerkin 24 matriisien 11. vaakariveihin, aiempien esimerkkien matriisien 2. vaakarivit verrattuna esimerkin 24 matriisien 10. vaakariveihin jne.) huomataan, että leikkausjoukot eivät ole muodostuneet samoista sävelluokista.

4.2.2.3. käänteismatriisit

Laajemman leikkausmatriisin yhteydessä käänteismatriisin muodostamisella on samanlainen ero transpositiomatriisin muodostamiseen kuin sillä oli suppeammankin matriisin yhteydessä.

Esimerkki 25 : joukot ovat samoja kuin useissa aiemmissa esimerkeissä. X on joukko -129-/4 eli 3-2 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}. Y on joukko -237-/4 eli 3-7 A/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}.

X:n normaalijäsenen numeroarvo on 4. Etsitään ruutu, joka on numerolla 4 merkittyjen vaaka- ja pystyrivien leikkauskohdassa. Sen koordinaatit ovat 4/4. Y:n normaalijäsenen numeroarvo 4 *lisätään* ruudun vaakarivin numeroarvoon, jolloin päädytään ruutuun 8/4. Pystyrivin numero säilyy nytkin ennallaan. (Muistisääntö: Y:n normaalijäsenen numeroarvoa X:n normaalijäsenen numeroarvoon lisättäessä liikutaan "X-ruudusta" aina *pystyrivillä alaspäin*).

Ensimmäinen •-merkki sijoitetaan ruutuun 8/4. Aiempaan tapaan alkutilanteen muiden merkkien sijoittumista ohjataan X:n intervallikon, tässä tapauksessa -129-, avulla. Intervallikon ensimmäinen jäsen 1 määrittää ruudusta 8/4 käsin vaakariviksi 9 ja pystyriviksi 5. Toinen •-merkki ruutuun 9/5. Intervallikon toinen jäsen 2 määrittää ruudusta 9/5 käsin vaakariviksi 11 ja pystyriviksi 7. Kolmas •-merkki ruutuun 11/7. Tähänastinen tilanne on kuvattu esimerkissä 25 a

Esim. 25 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8					●							
9						●						
10												
11								●				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

25 b

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0													0
1					●			●					1
2						●							2
3													3
4								●					4
5													5
6													6
7													7
8					●								8
9						●							9
10					●								10
11						●		●					11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Muiden •-merkkien sijoittumista pystyriveille ohjataan Y:n intervallikon, tässä tapauksessa -237-, avulla. Toiminnan suunta on nyt sama kuin normaalijäsenten yhteenlaskemisen yhteydessä, *alaspäin* eli kohden suurempia numeroarvoja. (Vastaten suppeammassa sisältöleikkausmatriisissa oikealle menoa).

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 8/4 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 10/4. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 10/4 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 1/4.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 9/5 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 11/5. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 11/5 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 2/5.

Intervallikon -237- ensimmäinen jäsen 2 määrittää ruudusta 11/7 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 1/7. Intervallikon toinen jäsen 3 määrittää ruudusta 1/7 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 4/7.

Matriisi on valmiina esimerkissä 25 b.

Vaakarivi n osoittaa X:n ja T_nIY:n leikkaukseen koon ja sävelluokkasisällön.

0. vaakarivi osoittaa X:n ja käänteis-Y:n (T_0IY) leikkaukseen koon ja sävelluokkasisällön. Käänteis-Y on -327-/3 eli 3-7 B/3, sävelluokkasisällöltään {3,6,8}.

1. vaakarivi osoittaa X-joukon ja T_1IY:n (Y-joukosta akselin 1/2 - 6 1/2 suhteen kääntämällä muodostetun joukon) -327-/4 eli {4,7,9} leikkauksen koon ja sävelluokkasisällön.

2. vaakarivi osoittaa X-joukon sekä T_2IY:n (Y-joukosta akselin 1 - 7 suhteen kääntämällä muodostetun joukon) -327-/5 eli {5,8,10} leikkauksen koon ja sävelluokkasisällön. Jne.

Esimerkki 26: asetelma on esimerkistä 12. X-joukko on 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}. Y-joukko on 3-11 A/7 eli -345-/7, sävelluokkasisällöltään {7,10,2}.

Esim:26 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1							●					
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9			●									
10				●								
11					●							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

26 b

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0			●										0
1				●			●						1
2					●								2
3													3
4			●				●						4
5				●									5
6					●								6
7													7
8							●						8
9			●										9
10				●									10
11					●								11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

X:n normaalijäsenen numeroarvo on kaksi. Etsitään ruutu, joka on numerolla 2 merkittyjen vaaka- ja pystyrivien leikkauskohdassa, ja lisätään Y:n normaalijäsenen numeroarvo 7 sen vaakarivin numeroarvoon. Pystyrivin numeroarvon säilyessä ennallaan päädytään ruutuun 9/2.

Ensimmäinen •-merkki sijoitetaan ruutuun 9/2. X:n intervallikon -1128- ensimmäinen jäsen 1 määrittää ruudusta 9/2 lähtien vaakariviksi 10 ja pystyriviksi 3. Toinen •-merkki ruutuun 10/3. Intervallikon toinen jäsen 1 määrittää ruudusta 10/3 lähtien vaakariviksi 11 ja pystyriviksi 4, joten kolmas •-merkki sijoitetaan ruutuun 11/4. Intervallikon kolmas jäsen 2 määrittää vielä ruudusta 11/4 lähtien vaakariviksi 1 ja pystyriviksi 6 (11+2/4+2). Neljäs •-merkki sijoitetaan ruutuun 1/6. Tähänastinen tilanne on kuvattu esimerkissä 26 a (edell. sivu).

Muiden •-merkkien sijoittumista pystyriveille ohjataan Y:n intervallikon -345- avulla. Toiminnan suunta alaspäin.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 9/2 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 0/2. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 0/2 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 4/2.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 10/3 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 1/3. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 1/3 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 5/3.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 11/4 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 2/4. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 2/4 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 6/4.

Intervallikon -345- ensimmäinen jäsen 3 määrittää ruudusta 1/6 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 4/6. Intervallikon toinen jäsen 4 määrittää ruudusta 4/6 alaspäin mentäessä merkin ruutuun 8/6.

Valmis matriisi on kuviossa 26 b.

4.2.2.4. X:n ja Y:n vaihtaminen laajemmassa käänteismatriisissa

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1							●			●		
2										●		
3												
4										●		
5												
6												
7												
8					●							
9					●							
10							●					
11					●		●					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 27 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0											●		0
1								●			●		1
2											●		2
3													3
4			●								●		4
5			●										5
6			●										6
7													7
8			●										8
9								●					9
10								●					10
11								●					11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

27 b

Esimerkki 27: a-kohdan käänteismatriisissa on käytetty samoja joukkoja kuin esimerkissä 25, mutta X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt X = {4,6,9} ja

Y = {4,5,7}.

27 b-kohdan käänteismatriisissa puolestaan on käytetty samoja joukkoja kuin esimerkissä 26, mutta X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt X = {7,10,2} ja Y = {2,3,4,6}.

Vertaamalla a-kohdan matriisia esimerkin 25 b matriisiin ja b-kohdan matriisia esimerkin 26 b-kohdan matriisiin voidaan todeta, että vaakarivien 0-11 riveittäin yhteenlasketuista •-merkeistä muodostuvat komponenttien jonot ovat identtiset. Leikkausjoukkojen sävelluokkasisältöihin yhtäläisyys ei sensijaan päde, kuten se ei pätenyt transpositiomatriisienkaan tapauksessa. Vastaavien vaakarivien leikkaukset eivät ole muodostuneet samoista sävelluokista.

4. 3. LEIKKAUSTEN YHTEENLASKETTU KOKO

Vektorien yksittäisten komponenttien määräytyminen juuri tietynkokoisiksi riippuu luonnollisesti kulloistenkin X- ja Y-joukkojen ominaisuuksista sekä vektorityypistä. Komponenttien *summa* sensijaan on yleisluontoisempi seikka, joka on vaivattomasti selvitettävissä X:n ja Y:n koon avulla.

Summa on aina yhtä suuri kuin X:n ja Y:n *kardinaalisuuksien tulo*, #X * #Y. (Intervallivektorit tekevät tässä suhteessa poikkeuksen. Niiden komponenttien summien määräytymistä tarkastellaan kohdassa 4.3.2.).

Esimerkiksi 2-jäsenisen X:n ja 2-jäsenisen Y:n transpositio- ja käänteisvektoreissa komponenttien summa on aina 2*2=4, riippumatta siitä kumpi joukoista kulloinkin on X ja kumpi Y, ja riippumatta myöskään siitä, kuuluvatko X ja Y eri joukkoluokkiin, samaan joukkoluokkaan vai ovatko ne kenties sama joukko.

3-jäsenisten X:n ja Y:n transpositio- ja käänteisvektoreissa komponenttien summa on aina 3 * 3=9, 4-jäsenisten vektoreissa 4 *4=16, 5-jäsenisten 5*5=25, 6-jäsenisten 6 * 6=36, 7-jäsenisten 7 * 7=49, 8-jäsenisten 8 * 8=64, 9-jäsenisten 9 * 9=81, 10-jäsenisten 10 * 10=100, 11-jäsenisten 11 * 11=121 ja 12-jäsenisten 12 * 12=144.

3- ja 5-jäsenisten X:n ja Y:n transpositio- ja käänteisvektoreissa komponenttien summa on aina 3 * 5=15, 4- ja 7-jäsenisten 4 * 7=28, 8-ja 6-jäsenisten 8 * 6=48 jne.[14]

4.4. SAMAN X:N JA Y:N TRANSPOSITIO- JA KÄÄNTEISVEKTORIT JA -MATRIISIT

Esimerkkien 5-6 tapausta lukuunottamatta ovat kaikki edellisten esimerkkien asetelmat tuottaneet ristikorrelaatiovektorin tai -matriisin, toisinsanoen X ja Y ovat kuuluneet eri joukkoluokkiin ja olleet niinmuodoin myös eri joukkoja. Se onko tietystä asetelmasta muodostettu transpositio- vaiko käänteisvektori/matriisi ei ole liioin muuttanut asiaa, sillä käänteisvektorien tapauksissa käänteis-Y:kin on ollut eri joukko ja eri joukkoluokan jäsen kuin X.

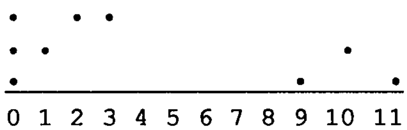
Seuraavassa on tarkoitus tarkastella saman X:n ja Y:n vektoreita ja matriiseja. Saman X:n ja Y:n transpositiovektori on autokorrelaatiovektori, ja saman X:n ja Y:n käänteisvektori on TICS-vektori, joka puolestaan on ristikorrelaatiovektorien alalaji. (Ks. kohta 1.3.). Jälkimmäinen luonnehdinta saattaa vaikuttaa paradoksaaliselta, sillä ristikorrelaatiovektorin kriteerinähän oli juuri *eri* X ja Y. Tällöin tulee kuitenkin muistaa, että käänteisvektorien/matriisien tapauksissa vain *käytetään* Y:tä, mutta tutkitaan todellisuudessa käänteis-Y:tä ja sen edustamaa joukkoluokkaa.

Vektorien tai matriisien muodostamisten kannalta jako eri X:n ja Y:n tai saman X:n ja Y:n tapauksiin ei sikäli olisi välttämätöntä, että toimenpiteet ovat samanlaisia X:n ja Y:n keskinäisistä suhteista riippumatta. Saman X:n ja Y:n tapausten erillisen tarkastelun puolesta puhuu kuitenkin se, että niillä on selkeitä tapauksensisäisiä ominaisuuksia, joiden tuntemisesta on hyötyä.

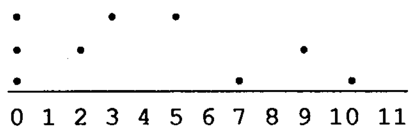
4.4.1. AUTOKORRELAATIOVEKTORIT JA -MATRIISIT

Autokorrelaatiomatriisia muodostettaessa on X:n ja Y:n normaalijäsenten erotus luonnollisesti kaikissa tapauksissa 0, joten ensimmäinen •-merkkikin sijoittuu aina (suppeammassa leikkausmatriisissa) indeksiin 0 tai (laajemmassa leikkausmatriisissa) johonkin ruutuun vaakarivillä 0. X:n ja Y:n ollessa sama joukko voidaan lyhyemmin puhua vain *X/Y-joukosta.*

Esim.28 a



Esim.28 b



Matriisit koottuina vektoreiksi:

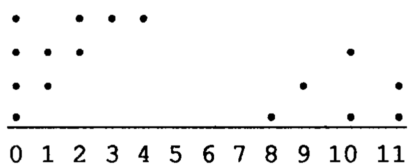
Esim.28 c

3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

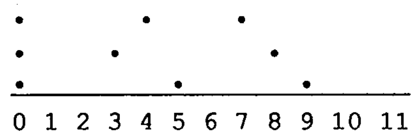
Esim.28 d

3	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.28 e



Esim.28 f



Matriisit koottuina vektoreiksi:

Esim.28 g

4	2	2	1	1	0	0	0	1	1	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 28 h

3	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 28 a autokorrelaatiomatriisissa X/Y-joukko on 3-2 A/4 eli -129-/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7}.
Esimerkin 28 b autokorrelaatiomatriisissa X/Y-joukko on 3-7 A/4 eli -237-/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,9}.
Esimerkin 28 e autokorrelaatiomatriisissa X/Y-joukko on 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}.
Esimerkin 28 f autokorrelaatiomatriisissa X/Y-joukko on 3-11 A/7 eli -345-/7, sävelluokkasisällöltään {7,10,2}.

Vektoreissa on kaksi merkillepantavaa yhtäläisyyttä. 1) indeksin 0 komponentti on kaikissa X/Y-joukon kokoinen. 2) indeksien 1-11 komponenttien muodostama numerojono on kaikissa symmetrinen indeksin 6 komponentin suhteen. Toisinsanoen numeroarvoiltaan komplementtisiin indekseihin tulee samankokoinen komponentti. Indeksin 1 viittaamalla Y:n transpositiolla on samankokoinen leikkaus X-joukon kanssa kuin indeksin 11 viittaamalla Y:n transpositiolla. Indeksin 2 viittaamalla Y:n transpositiolla on samankokoinen leikkaus X-joukon kanssa kuin indeksin 10 viittaamalla Y:n transpositiolla. Jne. Nämä ominaisuudet koskevat kaikkia autokorrelaatiovektoreita.

Autokorrelaatiovektoreilla on lisäksi muuan mielenkiintoinen ja tärkeä ominaisuus: ne kertovat X/Y-joukon *kokonaisintervallisisällön*. Tätä seikkaa, johon alustavasti viitattiin jo tämän luvun kohdassa 1.3., tarkastellaan seuraavassa hieman lähemmin.

4.4.2. JOUKON KOKONAISINTERVALLISISÄLTÖ

Käsitteistöä -luvun kohdassa 2.5. todettiin, että kaksi sävelluokkaympyrälle mielivaltaisesti sijoitettua sävelluokkaa a ja b määrittävät aina kaksi intervallia, suunnatun intervallin <a,b> = b-a (myötäpäivään a:sta b:hen) ja suunnatun intervallin <b,a> = a-b (myötäpäivään b:stä a:han). Nämä kaksi "välimatkavaihtoehtoa" ovat aina toistensa komplementti-intervallit ja muodostavat yhdessä jonkin intervalliluokan.

Jos tietty intervalli todetaan joukon kahden jäsenen välillä, merkitsee tämä automaattisesti sitä, että sen komplementti-intervalli on myös joukon intervallisisällössä mukana, muodostuen toisesta samojen jäsenten määrittämästä intervallista. Näinollen jos tietyn joukon kokonaisintervallisisällössä on n kappaletta intervallia m, on sen kokonaisintervallisisällössä automaattisesti aina myös n kappaletta komplementti-intervalleja 12-m.

Yhtäältä siis tiedetään, että autokorrelaatiovektorien numeroarvoiltaan komplementtisille indekseille muodostuu aina samankokoinen komponentti ja toisaalta, että joukossa on aina yhtä paljon komplementti-intervalleja. Tästä viriää luontevasti kiinnostus leikkauksen ja intervallisisällön keskinäiseen suhteeseen. Asiaa voidaan valaista seuraavan esimerkin avulla.

Esimerkki 29: oletetaan joukko, jonka jäsenet ovat sävelluokat {a,b,c,a+m,b+m,c+m}. Joukon kokonaisintervallisisältöön kuuluu 3 kappaletta intervalleja m, jotka sijaitsevat sävelluokkien a ja a+m, b ja b+m sekä c ja c+m väleissä.

Joukko {a,b,c,a+m,b+m,c+m} transponoidaan intervallilla m. Transponoinnin muodostuessa transpositiointervallin ja sävelluokkien yhteenlaskusta syntyy transpositiosta joukko {a+m,b+m,c+m,a+m+m,b+m+m, c+m+m}, jolla on kolme yhteistä sävelluokkaa transponoimattoman joukon kanssa, nimittäin sävelluokat a+m, b+m ja c+m. Kuten aina kahdella saman joukkoluokan jäsenjoukolla, on joukolla {a,b,c,a+m,b+m,c+m} ja sen m-transpositiolla identtinen kokonaisintervallisisältö. Alkuperäisen joukon ja m-transposition ensimmäisiä, toisia, kolmansia jne. sävelluokkia kutsutaan seuraavassa toistensa *vastinjäseniksi.*

Esimerkistä näkyy leikkauksen ja intervallisisällön käsitteiden keskinäinen riippuvuussuhde:

1) *joukon kokonaisintervallisisällössä on kolme kappaletta intervalleja m, siis joukolla on kolme yhteistä sävelluokkaa m-transpositionsa kanssa.*

Alkuperäisen joukon jäsen a transponoituu m-transpositiossa vastinjäsenekseen a+m, joka on myös alkuperäisen joukon jäsen. a+m voi olla joukkojen yhteinen jäsen vain sillä ehdolla, että alkuperäisessä joukossa on sekä jäsen a että jäsen a+m. Jos siinä olisi pelkkä a, ei m-transposition vastinjäsen a+m voisi tietenkään olla joukoille yhteinen. Jos taas siinä olisi pelkkä a+m, ei m-transpositiossa voisi olla yhteisenä jäsenenä tätä sävelluokkaa, sillä se on nimenomaisesti alkuperäisen joukon jäsenen a vastinjäsen. Yhteisen jäsenen edellytyksenä olevat alkuperäisen joukon sävelluokat a ja a+m määrittävät keskenään intervallin m: yhtä intervallia kohti yksi yhteinen jäsen. Sama tilanne on b:n ja b+m:n sekä c:n ja c+m:n välillä. Kolme intervallia m tuottavat joukoille kolme yhteistä sävelluokkaa.

2) *vastinjäseniltään intervallin m etäisyydellä toisistaan sijaitsevilla joukoilla on 3 yhteistä sävelluokkaa, siis joukoille yhteisessä kokonaisintervallisisällössä on kolme kappaletta intervallia m.*

m-transposition sävelluokkien a+m, b+m ja c+m vastinjäseninä alkuperäisessä joukossa tulee olla m:llä vielä transponoimattomat jäsenet a,b ja c. Toisaalta alkuperäisessä joukossa tulee olla myös jäsenet a+m, b+m ja c+m, sillä muuten yhteisten jäsenten ehto ei tulisi täytetyksi. Kolme yhteistä jäsentä joukkojen välillä sanelee kolme kpl intervalleja m alkuperäisen joukon kokonaisintervallisisältöön, sävelluokkaparien a ja a+m, b ja b+m sekä c ja c+m välille.

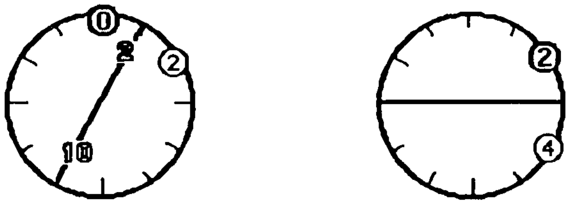
Ja vastaavasti, alkuperäisen joukon sävelluokkien a+m, b+m ja c+m vastinjäseninä m-transpositiossa tulee olla m:llä transponoidut sävelluokat a+m+m, b+m+m ja c+m+m. Toisaalta m-transpositiossa tulee yhteisten jäsenten ehdon täyttämiseksi olla myös jäsenet a+m, b+m ja c+m. Täten joukkojen välisestä kolmesta yhteisestä jäsenesta seuraa m-transposition kokonaisintervallisisältöön 3 kpl intervalleja m, sävelluokkaparien a+m ja a+m+m, b+m ja b+m+m sekä c+m ja c+m+m välille.

Joukkojen vastinjäsenten välisten etäisyyksien toinen vaihtoehto on intervallin m komplementti-intervalli 12-m, joten a) joukkojen yhteisessä kokonaisintervallisisällössä on kolme kappaletta myös intervallia 12-m, ja b) vastinjäseniltään 12-m:n etäisyydellä toisistaan olevilla joukoilla on kolme yhteistä sävelluokkaa.

Selvennykseksi muutama lisäesimerkki. Tällä erää ei puhuta joukon transponoimisesta toiseksi joukoksi, vaan yksinkertaisesti jäsenjoukkojen välisistä etäisyyksistä.

Esimerkki 30: oletetaan kaksi joukkoluokan 2-2 jäsenjoukkoa, {0,2} ja {2,4}. (Esim. 30 a-b).

Esim.30 a 30 b



Joukkojen yhteinen intervallikko on -2,10-. Joukkojen niinikään yhteinen autokorrelaatiovektori on esimerkissä 30 c.

Esim.30 c

2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Joukkojen {0,2} ja {2,4} leikkaus on yhden sävelluokan kokoinen. Vastinjäsenten välisten etäisyyksien vaihtoehdot ovat intervallit 2 ja 10.

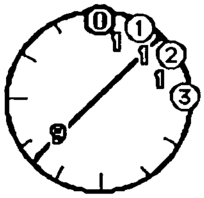
Kokonaisintervallisisältöön kuuluu 1 kpl intervalleja 2, joukossa {0,2} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 0-2 välillä ja joukossa {2,4} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 2-4 välillä. Molempiin joukkoihin muodostuu yksi kappale myös kakkosten komplementti-intervalleja 10, joukkoon {0,2} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 2-0 välille ja joukkoon {2,4} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 4-2 välille.

Joukkojen leikkaukseen kuuluu siis yhtä monta sävelluokkaa kuin kokonaisintervallisisältöön kuuluu niitä intervalleja, jotka vastaavat vastinjäsenten kahta mahdollista keskinäistä etäisyyttä.

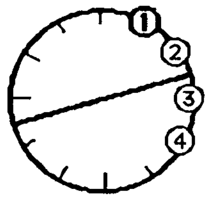
Esimerkki 31: oletetaan kaksi joukkoluokan 4-1 jäsenjoukkoa, {0,1,2,3} ja {1,2,3,4}. (Esim.31 a-b, seur. sivu).
Yhteinen intervallikko on -1119-. Yhteinen autokorrelaatiovektori on esimerkissä 31 c.Joukkojen leikkaus on kolmen sävelluokan kokoinen. Vastin-

jäsenten välisten etäisyyksien vaihtoehdot ovat intervallit 1 ja 11.

Esim.31 a



31 b



Esim.31 c

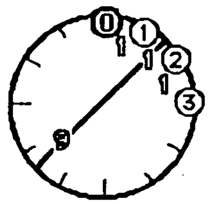
4	3	2	1	0	0	0	0	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Yhteiseen kokonaisintervallisisältöön kuuluu 3 kpl intervalleja 1, joukossa {0,1,2,3} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 0-1, 1-2 ja 2-3 välillä ja joukossa {1,2,3,4} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 1-2, 2-3 ja 3-4 välillä. Molemmissa on 3 kpl myös intervalleja 11, joukossa {0,1,2,3} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 1-0, 2-1 ja 3-2 välillä ja joukossa {1,2,3,4} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 2-1, 3-2 ja 4-3 välillä.

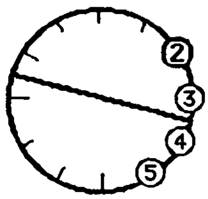
Joukkojen leikkaukseen kuuluu yhtä monta sävelluokkaa kuin kokonaisintervallisisältöön kuuluu niitä intervalleja, jotka vastaavat vastinjäsenten kahta mahdollista keskinäistä etäisyyttä.

Esimerkki 32: oletetaan kaksi joukkoluokan 4-1 jäsenjoukkoa, {0,1, 2,3} ja {2,3,4,5}. (Esim.32 a-b).

Esim.32 a



32 b



Yhteinen intervallikko on -1119-. Yhteinen autokorrelaatiovektori on esimerkissä 32 c.

Esim. 32 c

4	3	2	1	0	0	0	0	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Joukkojen leikkaus on kahden sävelluokan kokoinen. Vastinjäsenten välisten etäisyyksien vaihtoehdot ovat intervallit 2 ja 10.

Kokonaisintervallisisältöön kuuluu 2 kpl intervalleja 2, joukossa {0,1,2,3} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 0-2 ja 1-3 välillä ja joukossa {2,3,4,5} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 2-4 ja 3-5 välillä. Molemmissa on myös 2 kpl intervalleja 10, joukossa {0,1, 2,3} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 2-0 ja 3-1 välillä ja joukossa {2,3,4,5} myötäpäivään kuljettaessa sävelluokkien 4-2 ja 5-3 välillä.

Edellisten esimerkkien tapaan leikkaukseen kuuluu yhtä monta sävelluokkaa kuin kokonaisintervallisisältöön intervalleja, jotka vastaavat vastinjäsenten kahta mahdollista keskinäistä etäisyyttä.

Autokorrelaatiovektoria ja kokonaisintervallisisältöä voidaan "lukea ristiin". Leikkausten koot (autokorrelaatiovektorien komponentit) kertovat, kuinka monta kappaletta kutakin intervallia joukon kokonaisintervallisisällössä on. Kokonaisintervallisisällön tietyn intervallin määrä puolestaan kertoo, kuinka suuri leikkaus vastinjäseniltään tuota intervallia vastaavalla etäisyydellä toisistaan olevien jäsenjoukkojen välille muodostuu.

Juuri tätä seikkaa koskee kohdan 4.1.3. huomautus, jossa todettiin eräiden joukkoteoreettisissa teksteissä käytettyjen termien viittaavan intervallisisältöön kun kyse on leikkauksista, ja päinvastoin. Käsitteiden välillä on suora yhteys, jota voidaan käyttää hyväksi.

4.4.3. INTERVALLIVEKTORI

Koska autokorrelaatiovektorin indeksin 0 komponentti on aina tutkittavan joukon kokoinen ja koska indekseihin 1-11 tulevat komponentit asettuvat aina indeksin 6 komponentin suhteen symmetriseen asetelmaan, voidaan indeksin 0 komponetti ja indeksien 7-11 komponentit jättää pois. Lisäksi indeksin 6 komponentti *jaetaan kahdella.*

Tällöin on autokorrelaatiovektorista muodostettu 6-indeksinen *intervallivektori.* Vasemmanpuoleisin indeksi on nro 1, seuraava nro 2 jne, kuuteen saakka. Vektorin lyhyyden vuoksi indeksejä ei yleensä merkitä näkyviin. Komponentin sijainti vektorissa osoittaa, mikä sen indeksi on.

Intervallivektori tarjoaa periaattessa saman määrän tietoa kuin autokorrelaatiovektorikin, sillä autokorrelaatiovektorista karsittu informaatio on helposti pääteltävissä olevaa. Autokorrelaatiovektorin indeksin 0 komponentti on aina suoraan nähtävissä X/Y-joukon koosta - joukolla on aina itsensä kokoinen leikkaus itsensä kanssa - ja indeksien 7-11 komponentit selviävät tutkimalla numeroarvoiltaan komplementtisten indeksien komponentit. 6. komponentin puolittaminen sensijaan saattaa ensialkuun herättää protestimielialaa: miksi yhteen komponenttiin kajotaan, kun muut jätetään entiselleen. Tämä on kuitenkin johdonmukaista.

4.4.3.1. intervallivektorin indeksin 6 komponentin puolittaminen

Oletetaan, että tietyn joukon sävelluokkien väliltä löytyvät intervallit 1, 2, 3, 4 ja 5. Kunkin löydöksen seurauksena autokorrelaatiovektorin *kaksi* komponenttia kasvaa *yhdellä* yksiköllä, sillä intervallin 1 löytyminen tietää automaattisesti myös sen komplementti-intervallin 11 löytymistä, intervallin 2 löytyminen sen komplementti-intervallin 10 löytymistä jne. Toisinsanoen yhden intervalliluokan komplementtiset jäsenintervallit jakautuvat vektorissa kahtaalle. Kukin indeksien 1-5 ja 7-11 komponenteista osoittaa tällöin suoraan indeksinsä numeroarvoa vastaavien intervallien m määrän, intervalliluokkien m/12-m määrän sekä leikkauksen koon vastinsäveliltään intervallin m etäisyydellä toisistaan sijaitsevien jäsenjoukkojen välillä.

Jos joukon sävelluokkien väliltä löytyy vielä intervalli 6, kasvaa sen seurauksena autokorrelaatiovektorin *yksi* komponentti *kahdella* yksiköllä, sillä tämänkin intervallin löytyminen tietää automaattisesti sen komplementti-intervallin löytymistä, ja 6:n komplementti-intervalli on 6 itse. Muista intervalliluokista poiketen intervalliluokan 6 jäsenintervallit keräytyvät vektorissa yhteen komponenttiin. Autokorrelaatiovektorin indeksin 6 komponentti osoittaa suoraan intervallien 6 lukumäärän sekä vastinjäseniltään intervallin 6 etäisyydellä toisistaan sijaitsevien jäsenjoukkojen yhteisten jäsenten määrän, mutta muista komponenteista poiketen intervalliluokkien määrän *kaksinkertaisena.*

Kun esimerkkitapauksen autokorrelaatiovektorista muodostetaan intervallivektori, päädytään intervalliluokkien 1-5 kannalta tilanteeseen, jossa toiset jäsenintervalleista - yhdestä viiteen - on otettu mukaan intervalliluokkien "edustajiksi" ja loput jäsenintervalleista - seitsemästä yhteentoista - on jätetty pois.

Intervalliluokan 6 tapauksessa täytyy luonnollisesti toimia aivan samoin, ottaa intervalliluokan jäsenintervalleista toinen edustajaksi. Muista tapauksista poiketen intervalliluokan 6 jäsenintervalleja ei ole jo valmiiksi jaettu kahden indeksin osalle, joten toimenpide on erikseen suoritettava. Komplementtiparien 1/11, 2/10, 3/9, 4/8 ja 5/7 kohdalla edustajan valinta merkitsee toisen jäsenintervallin poisjättämistä, komplementtiparin 6/6 kohdalla 6. komponentin jakamista kahdella.

Kun autokorrelaatiovektorin 6. komponentti on jaettu intervallivektorin muodostamiseksi kahdella, se osoittaa muiden komponenttien tavoin suoraan intervalliluokkien lukumäärän, mutta muista komponenteista poiketen *puolet* intervallien määrästä ja *puolet* vastinjäseniltään indeksiään vastaavan intervallin etäisyydellä toisistaan sijaitsevien jäsenjoukkojen yhteisten jäsenten määrästä. Tämän vuoksi tarkasteltaessa leikkauksia intervallivektorin avulla tulee 6. komponentin kohdalla toimia toisin päin kuin autokorrelaatiovektoria typistettäessä eli *kertoa 6. komponentti kahdella.* Tällöin leikkauksen koko näkyy oikeana.

Kuten huomataan, kummassakaan vektorityypissä 6. komponentin informaatio ei ole kaikilta osin eksakti. Autokorrelaatiovektorissa on intervalliluokalla 6 "yliedustus" ja intervallivektorissa puolestaan leikkauksen koolla ja intervallien määrällä "aliedustus". Sille että joukkoteoreettisissa teksteissä hyödynnetään nimenomaan intervalli- eikä autokorrelaatiovektoreita - intervalliluokan 6 määrä halutaan eksaktisti esiin leikkauksen koon eksaktiuden kustannuksella - löytyy tietty järkeenkäypä selitys, jota käsitellään kohta lähemmin.[15]

Samaa asiaa, intervallin 6 erilaista käyttäytymistä muihin intervalleihin verrattuna, voidaan tarkastella myös hieman toisesta näkökulmasta 2-jäsenisten joukkojen avulla. Joukkoluokka 2-6, jonka jäsenjoukkojen sävelluokat ovat intervallin 6 etäisyydellä toisistaan, on ainoana kaksijäsenisenä joukkoluokkana (2-akselisesti) kiertosymmetrinen. Joukkoluokat 2-1, 2-2, 2-3, 2-4 ja 2-5 ovat (1-akselisesti) käänteissymmetrisiä.

Joukkoluokan 2-6 kuuden jäsenjoukon välille ei synny leikkauksia lainkaan, mutta transponoiminen intervallilla 6 tuottaa joukon itsensä. Näinollen jos kaksi tietyn n-jäsenisen (n > 2) joukon jäsentä ovat intervallin 6 päässä toisistaan, aiheuttavat ne intervallin itseensäkiertyvyyden vuoksi *kaksi* yhteistä jäsentä joukon ja vastinjäseniltään intervallin 6 etäisyydellä olevan jäsenjoukon välille. Jos joukon 4 jäsentä on kaksittain intervallin 6 päässä toisistaan, on yhteisiä jäseniä vastinjäseniltään intervallin 6 etäisyydellä olevan jäsenjoukon kanssa 4 kpl. 6 kaksittain intervallin 6 päässä toisistaan olevaa jäsentä tuottaa 6 yhteistä jäsentä jne., aina parillisen määrän yhteisiä sävelluokkia. Tämän vuoksi autokorrelaatiovektorin 6. komponentin puolittaminen tuottaa aina kokonaisluvun.

12-jäsenjoukkoisten joukkoluokkien 2-1, 2-2, 2-3, 2-4 ja 2-5 tapauksissa taas jokaiselle joukolle syntyy yhden sävelluokan kokoinen leikkaus kahden muun jäsenjoukon kanssa. Jos kaksi tietyn n-jäsenisen joukon jäsentä ovat intervallin m (jokin intervalleista 1, 2, 3, 4 tai 5) päässä toisistaan, aiheuttavat ne *yhden* yhteisen jäsenen joukon ja vastinjäseniltään intervallin m etäisyydellä olevan jäsenjoukon välille, mutta toisaalta automaattisesti yhden yhteisen jäsenen myös joukon ja vastinjäseniltään intervallin 12-m etäisyydellä olevan jäsenjoukon välille.

Intervallien 6 tapauksessa m ja 12-m ovat sama intervalli, joten asetelma "joukko J ja vastinjäseniltään intervallin m etäisyydellä oleva joukko" on täsmälleen sama kuin asetelma "joukko J ja vastinjäseniltään intervallin 12-m etäisyydellä oleva joukko". Asetelmia on puolet vähemmän kuin muiden intervallien kohdalla, mutta kukin intervalli 6 tuottaa kaksi kertaa suuremman leikkauksen.

4.4.3.2. intervallivektorin ominaisuuksista

Vaikka tähän mennessä on käynyt ilmi, miksi autokorrelaatiovektorista intervallivektoria muodostettaessa tulee 6. komponentti jakaa kahdella ja vastaavasti leikkauksia intervallivektorista tutkittaessa kertoa se kahdella, ei sensijaan ole vielä selvinnyt, miksi autokorrelaatiovektorista ylimalkaan pitäisi muodostaa intervallivektori. Edellähän jo todettiin, että autokorrelaatiovektorin tavoin intervallivektorikin tarjoaa 6. komponentin osalta eräistä seikoista "puolivalmista" tietoa, ja lisäksi 6-indeksiseen vektoriin siirryttäessä menetetään kaikkien muiden leikkausvektorien noudattama yhtenäinen esitystapa.

Syynä on se, että kuvaamalla joukon intervallirakennetta intervallivektorin tarjoamassa muodossa, saadaan I-avaruudellisen kokonaisintervallisisällön käsite lähemmäksi R-avaruudellisen kokonaisintervallisisällön käsitettä, siis lähemmäksi todellista musiikillista tilannetta.

Esimerkki 33: joukko {0,1} kuuluu joukkoluokkaan 2-1. (Joukko on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle esimerkissä 29 a). Sen intervallikko on -1,11-. Joukon autokorrelaatiovektori on esimerkissä 33 a ja intervallivektori esimerkissä 33 b.

Esim. 33 a

2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

33 b

[100000]

Sävelluokkien välinen intervalli on myötäpäivään nollasta yhteen kuljettaessa 1 ja myötäpäivään ykkösestä nollaan kuljettaessa 11. Oletetaan tämän jälkeen joukko säveltasokombinaatioita, joista kaikista muodostuu joukko {0,1}. Ne ovat siis joukon {0,1} rekisteriavaruudellisia ilmentymiä, kahden sävelen kombinaatioita joista kunkin muodostaa jokin sävel c ja jokin sävel des.[16] (Esim. 33 c-j).

Esim. 33 c d e f g h i j

Sävelluokat tulkitaan rekistereiltään määrittelemättömiksi, joten I-avaruudessa ei voida R-avaruudellisessa mielessä puhua suunnasta "ylöspäin" tai "alaspäin". Ympyrälle sijoitetun sävelluokkaparin väliset kaksi intervallia tarjoavat kuitenkin käyttökelpoista tietoa myös tuon sävelluokkaparin R-avaruudellisista ilmentymistä, osoittaessaan säveltasokombinaatioiden jäsentenvälisten etäisyyksien kaksi mahdollista perusasetelmaa.

Myötäpäivään nollasta yhteen kuljettaessa muodostuva intervalli 1 viittaa siihen, että R-avaruudessa c:n ja des:n välinen intervalli on pieni sekunti tai jokin sen oktaavikerrannaisista - pieni nooni, kaksi oktaavia ja pieni sekunti, kolme oktaavia ja pieni sekunti jne. (Esim.33 c-f).

Myötäpäivään ykkösestä nollaan kuljettaessa muodostuva intervalli 11 puolestaan viittaa siihen, että R-avaruudessa des:n ja c:n välinen intervalli on suuri septimi tai jokin sen oktaavikerrannaisista. (Esim.33 g-j).

Vaihtoehtoja on näinollen kaksi, asetelma "c on matalammalla kuin des" ja asetelma "c on korkeammalla kuin des". Kukin yksittäinen R-avaruudellinen joukon {0,1} ilmentymä voi tietenkin kuulua näistä vain toiseen. Autokorrelaatiovektori kirjaa kuitenkin sekä intervallin 1 että intervallin 11, toisinanoen *molemmat* R-avaruudellisten kombinaatioiden jäsentenvälisten etäisyyksien vaihtoehdot. I-avaruuden syklisyydestä johtuen niin joukossa {0,1} kuin muissakin joukoissa on yksinkertaisesti *enemmän intervalleja* kuin niistä johdetuissa R-avaruudellisissa säveltasokombinaatioissa.

Autokorrelaatiovektori näyttää kaikki joukon intervallit, joten säveltasokombinaatioiden intervallimäärien kannalta sen tarjoama informaatio sisältää päällekkäisyyttä.

Intervallivektori kuvaa tässä suhteessa tilannetta täsmällisemmin. Esimerkkitapauksen {0,1} intervallivektori kertoo kaikista joukon R-avaruudellisista ilmentymistä, että intervalleja on aina vain yksi kappale, ja että tuo intervalli on kaikissa olosuhteissa *terävä dissonanssi*, joko pieni sekunti (tai jokin sen oktaavikerrannaisista) tai vaihtoehtoisesti suuri septimi (tai jokin sen oktaavikerrannaisista). Kussakin tapauksessa säveltasojen väliset etäisyydet, rekistereiden aiheuttamat soinnilliset tekijät yms. seikat vaihtelevat, mutta intervallin harmoninen karaktääri säilyy.

Intervallivektori kertoo näinollen paitsi joukon intervalliluokkasisällön, myös kaikille joukosta johdettaville säveltasokombinaatioille yhteisen intervallien määrän sekä näiden intervallien harmoniset karaktäärit. Joukoista johdettavilla R-avaruudellisilla säveltasokombinaatioilla voi olla kuinka monta erilaista jäsentenvälistä järjestystä tai etäisyyttä hyvänsä - suurilla joukoilla esimerkiksi pianon koskettimiston määrittämissä rajoissa miljoonia - mutta intervallien karaktäärivalikoimia tai ehkäpä pikemminmin *kokonaisintervallikaraktäärisisältöjä* kaikissa olosuhteissa vain yksi, jonka intervallivektori suoraan osoittaa. Sen kuusi indeksiä ilmoittavat vasemmalta lukien terävien dissonanssien, mietojen dissonanssien, pieni terssi/suuri seksti-tyyppisten sointusävyisten konsonanssien, suuri terssi/pieni sekstityyppisten sointusävyisten konsonanssien, avosävyisten konsonanssien ja tritonusten määrät joukosta johdettavissa R-avaruudellisissa säveltasokombinaatioissa. Intervallivektori on siten näkökulma kunkin säveltasokombinaation *varsinaiseen* kokonaisintervallisisältöön. Se saattaa vaikkapa osoittaa, että tietyn säveltasokombinaation jäsenten välille syntyy kuusi terävää dissonanssia, mutta se ei kerro, miten nuo kuusi intervallia ovat ryhmittyneet pieniksi sekunneiksi, suuriksi septimeiksi, pieniksi nooneiksi jne.

Jokainen tasavireinen säveltasokombinaatio on jokin 4096:sta joukosta, joista jokainen kuuluu johonkin 352:sta joukkoluokasta. Yhdistämällä identtisen intervallivektorin omaavat käänteisjoukkoluokat saadaan A/B-tyyppisten ja inversiosymmetristen joukkoluokkien kokonaismääräksi 224. Edelleen voidaan yhdistää Z-suhteiset joukkoluokat, niinikään identtisten intervallivektorien perusteella. Lisäksi joukkoluokilla 0-1 ja 1-1 on yhteisenä vektorinaan [000000]. Täten erilaisten intervallivektoreiden (ja R-avaruudellisten kokonaisintervallikarakteerisisältöjen) määrä on ainoastaan 200. (Jos 0-1:n ja 1-1:n vektori tulkitaan triviaalitapaukseksi jota ei lasketa mukaan, on erilaisia intervallivektoreita 199). Pianon koskettimistolta muodostettavista 2^{88}:sta säveltasokombinaatiosta jokainen edustaa jotakin näistä 200:stä kokonaisintervallikarakteerisisällöstä.[17]

Kaikissa samankokoisista joukoista muodostetuissa intervallivektoreissa komponenttien summa on yhtä suuri.[18] n-jäsenisen joukon intervallivektorin komponenttien summa saadaan esimerkiksi seuraavanlaisista kaavoista (seur. sivu):

$$\frac{n^2-n}{2} \quad \text{tai} \quad \frac{n\,(n-1)}{2}$$

joukon koko	intervallivektorin komponenttien summa
0	0
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66

4.4.4. TICS-VEKTORI

Saman X:n ja Y:n käänteisvektorilla eli TICS-vektorilla ei ole yhtä monipuolisia ominaisuuksia kuin autokorrelaatiovektorilla ja tai siitä johdettavalla intervallivektorilla. TICS-vektori osoittaa X/Y-joukon ja käänteis-X/Y:n kaikkien transpositioiden leikkausten koot (X/Y:n ja vuoroin kaikkien kahdentoista akselin suhteen käännetyn X/Y:n leikkausten koot). Jäsenjoukkokierron aloitusjoukko on akselin 0-6 suhteen käännetty X/Y-joukko.

Kohdassa 2.1.3. todettiin, että joukkoluokan eri jäsenjoukoista vuoroin johdetut autokorrelaatiovektorit ovat keskenään identtisiä, mutta että TICS-vektoreita syntyy samasta asetelmasta useimmiten kuusi. Vektorit ovat toistensa rotaatioita. Autokorrelaatiovektorien tapauksissa identtisyyden todettiin johtuvan siitä, että X:n ja Y:n samuus sanelee normaalijäsenten numeroarvojen erotukseksi aina nollan. Matriisin muodostaminen aloitetaan aina samasta indeksistä käsin.

Käänteisvektoreita selvitettäessä matriisin muodostaminen aloitettiin laskemalla normaalijäsenten numeroarvot yhteen, ensimmäisen •-merkin saavan indeksin löytämiseksi. Saman X:n ja Y:n tapauksissa tämä merkitsee sitä, että joukkoluokan kunkin jäsenjoukon voidessa toimia vuorollaan X/Y-joukkona muodostuu mahdollisia yhteenlaskutilanteita useimpien joukkoluokkien kohdalla kaksitoista: 0+0=0, 1+1=2, 2+2=4, 3+3=6, 4+4=8, 5+5=10, 6+6=0, 7+7=2, 8+8=4, 9+9=6, 10+10=8, 11+11=10.

Erilaisia summia on yhteensä kuusi. Täten indeksejä, joihin ensimmäinen •-merkki voi sijoittua, on myöskin kuusi. Kaikki vaihtoehdot sijoittuvat numeroarvoiltaan parillisiin indekseihin. (Esim.34 a-f).

Sama normaalijäsenten summa muodostuu sävelluokista, joiden välillä on intervalli kuusi: 0+0=0/6+6=0, 1+1=2/7+7=2, 2+2=4/8+8=4, 3+3=6/9+9=6, 4+4=8/10+10=8 ja 5+5=10/11+11=10. Tästä seuraa, että intervallin 6 etäisyydellä toisistaan olevien jäsenjoukkojen TICS-vektori on identtinen.[19]

Esim.34 a

•											
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

34 b

		•									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

34 c

				•							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

34 d

						•					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

34 e

								•			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

34 f

										•	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Useimpien joukkoluokkien tapauksissa jokainen kuudesta vaihtoehdosta tuottaa siis erilaisen matriisin ja edelleen erilaisen vektorin. Poikkeuksen muodostavat *jaksollisia* TICS-vektoreita tuottavat joukkoluokat.

Esimerkki 35: kolmiakselisesti kiertosymmetrisen joukkoluokan 3-12 TICS-vektoreista on erilaisia vain kaksi. (Esim 35 a ja b).

Esim.35 a

3	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

35 b

0	0	3	0	0	0	3	0	0	0	3	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kiertosymmetristen joukkoluokkien leikkausvektoreihin palataan tuonnempana tarkemmin.

MUITA TAPOJA LEIKKAUSVEKTORIEN MUODOSTAMISEKSI

4.5. X:N JA Y:N JÄSENTEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU

Transpositiovektorien muodostaminen voidaan aina esittää X- ja Y-joukkojen jäsenten *vähennyslaskun* avulla. Käänteisvektorien muodostaminen voidaan puolestaan aina esittää X- ja Y-joukkojen jäsenten *yhteenlaskun* avulla. Nämä tavat ovat joukkoteoreettisissa teksteissä selvästi yleisimmin käytetyt, olipa kyse sitten intervallisisältöjen tai leikkausten lainalaisuuksien teoreettisesta pohdiskelusta[20] tai intervalli- ja TICS-vektorien sekä vakiomatriisien muodostamistoimenpiteistä. (Näiden operaatioiden määrittelemisen yhteydessä ei luonnollisestikaan puhuta X- ja Y-joukoista, jotka ovat tämän esityksen termejä. Lähtöasetelmat saattavat poiketa toisistaan, mutta eri tapaukset ovat yhtäkaikki selvitettävissä ja lähestyttävissä X- ja Y-joukkojen käsitteiden avulla).

Seuraavassa on tarkoitus paitsi luoda yleissilmäys yhteen- ja vähennyslaskun avulla tapahtuviin vektorinmuodostustapoihin, myös tutkia muutamaa oikotietä operaatioiden nopeuttamiseksi.

4.5.1.TRANSPOSITIOVEKTORIT

4.5.1.1. eri X:n ja Y:n transpositiovektorit

Esimerkki 36: tehtävänä on muodostaa transpositiovektorit joukkojen -129-/4 eli {4,5,7} ja -237-/4 eli {4,6,9} välille. Vaihtoehtoja on kaksi, kumpikin joukko X:nä ja kumpikin Y:nä. (Joukot ovat sijoitettuina sävelluokkaympyröille esimerkin 8 a- ja b-kohdissa).

Toimenpide tapahtuu vähentämällä jokaisesta X-joukon jäsenestä jokainen Y-joukon jäsen. Tilanteet voidaan merkitä vaikkapa seuraavasti:

Esim.36 a

4-4=0	5-4=1	7-4=3
4-6=10	5-6=11	7-6=1
4-9=7	5-9=8	7-9=10

1	2	0	1	0	0	0	1	1	0	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.36 b

4-4=0	6-4=2	9-4=5
4-5=11	6-5=1	9-5=4
4-7=9	6-7=11	9-7=2

1	1	2	0	1	1	0	0	0	1	0	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Pystysuorissa sarakkeissa miinusmerkkien vasemmalla puolella olevista, kussakin sarakkeessa samana pysyvistä numeroista muodostuu yhdessä X-joukko. Esimerkin 36 a)-kohdassa X={4,5,7} ja 36 b)-kohdassa X={4,6,9}. Y-joukko sijoitetaan kokonaisuudessaan miinusmerkkien oikealle puolelle ylhäältä alas.

Erotus n viittaa vektorin numeroarvon n omaavaan indeksiin. Numeroarvon n omaavien erotusten *määrä* sijoitetaan komponentiksi indeksiin n. Esimerkiksi a)-kohdassa on numeroarvoltaan 0 olevia erotuksia 1 kpl. Indeksiin 0 sijoitetaan siis komponentiksi ykkönen. Numeroarvoltaan 1 olevia erotuksia on 2 kpl. Indeksiin 1 sijoitetaan komponentiksi 2. Numeroarvoltaan 2 olevia erotuksia ei ole, joten indeksiin 2 tulee komponentiksi 0 jne.

Kunkin leikkauksen sävelluokkasisältö saadaan selville katsomalla, missä X-joukon jäsenten määrittämissä sarakkeissa erotukset sijaitsevat. a)-kohdan ainoa erotus 0 sijaitsee 4-sarakkeessa, eli sarakkeessa jossa X-joukon jäsenestä 4 vähennetään kaikki Y-joukon jäsenet. Nollan esiintyminen 4-sarakkeessa merkitsee, että joukkojen X ja Y sisältöleikkaus muodostuu sävelluokasta 4. Nolla viittaa Y:n nollatranspositioon.

Numeroarvon 1 omaavat erotukset sijaitsevat 5- ja 7-sarakkeissa. Täten X-joukon ja vastinjäseniltään Y-joukosta (myötäpäivään mentäessä) intervallin 1 etäisyydellä sijaitsevan jäsenjoukon -237-/5 eli {5,7,10} leikkaus koostuu sävelluokista 5 ja 7. Jos {4,6,9} = T_0Y, niin {5,7,10} = T_1Y.

Numeroarvon 10 omaavat erotukset ovat 4- ja 7-sarakkeissa. Täten X-joukon ja vastinjäseniltään Y-joukosta (myötäpäivään mentäessä) intervallin 10 etäisyydellä sijaitsevan jäsenjoukon -237-/2 eli {2,4,7} sisältöleikkaus koostuu sävelluokista 4 ja 7. Jos {4,6,9} = T_0Y, niin {2,4,7} = $T_{10}Y$. Jne.

36 a- ja 36 b-kohtia vertaamalla näkyy havainnollisesti, miksi eri X:n ja Y:n transpositiovektoreiden vaihtoehtoisissa X- ja Y-asetelmissa indeksien 1-11 komponentit muodostavat päinvastaiset numerojonot. Kun esim. X:n jäsen viidesta vähennetään Y:n jäsen 9, saadaan 5-9=-4=8. Kun X ja Y vaihtavat paikkaa, tulee suoritettavaksi laskutoimitus, jossa äskeiset luvut ovat toisin päin, 9-5=4. Neljä on edellisestä laskutoimituksesta saadun erotuksen 8 komplementti. Yleensä kahden sävelluokan vähentäminen toisistaan molemmissa mahdollisissa järjestyksissä tuottaa kaksi erotusta, jotka ovat aina toistensa komplementteja.

Jos tietyssä tilanteessa syntyy vaikkapa kaksi kappaletta erotuksia 1, syntyy X ja Y vaihtamalla kaksi kappaletta erotuksia 11. Jos erotuksia 2 ei synny lainkaan, ei X:n ja Y:n vaihtamisen jälkeen myöskään synny yhtään erotusta 10. Jos kolmosen kokoisia erotuksia syntyy 1 kpl, syntyy vastaavasti X:n ja Y:n vaihduttua 1 kpl erotuksia 9 jne.

X:n ja Y:n jäsenten vähentäminen toisistaan esimerkin 36 osoittamalla tavalla on yksinkertainen mutta usein toistettavaksi liian työläs toimenpide. Koko sarakevaiheen voi kuitenkin jättää pois ja merkitä kunkin erotuksen lukumäärä suoraan vektoriin. Toimenpidettä varten on käytännöllistä merkitä joukot allekkain, vaikkapa X:n ollessa päällimmäisenä. Tämän jälkeen ryhdytään vertailemaan X:n jäseniä Y:n jäseniin.

Esimerkki 37:
{4,5,7} = X
{4,6,9} = Y

X:n jäsen 4 on yhtä suuri kuin Y:n jäsen 4. Niiden erotus on ainoa nollan tuottava erotus. Indeksiin 0 tulee komponentiksi 1.

X:n jäsenet 5 ja 7 ovat tahoillaan ykkösen verran suurempia kuin Y:n jäsenet 4 ja 6. Erotusten määrä tuottaa indeksiin 1 komponentiksi kakkosen.

Yksikään X:n jäsen ei ole kahta suurempi kuin Y:n jäsen. Kakkosen tuottavia erotuksia ei ole, joten indeksiin 2 tulee komponentiksi 0.

X:n jäsen 7 on kolmea suurempi kuin Y:n jäsen 4. Muita kolmosen tuottavia erotuksia ei ole, joten indeksiin 3 komponentiksi 1.

Yksikään X:n jäsen ei ole neljää suurempi kuin Y:n jäsen. Indeksiin 4 komponentiksi 0.

Yksikään X:n jäsen ei ole viittä suurempi kuin Y:n jäsen. Indeksiin 5 komponentiksi 0.

Yksikään X:n jäsen ei ole kuutta suurempi kuin Y:n jäsen. Indeksiin 6 komponentiksi 0.

Yli 6:n menevät erotukset on helpompi havaita erotusten numeroarvojen *komplementteja* vastaavien erotusten avulla. Y:n 9 vähennettynä X:n 4:stä on 7. Tällöin automaattisesti X:n 4 vähennettynä Y:n 9:stä on 5.

Toisinsanoen erotuksia 0-6 etsittäessä tutkitaan, kuinka monet X:n jäsenistä ovat halutun erotuksen verran suurempia kuin Y:n jäsenet. Erotuksia 7-11 etsittäessä sensijaan tutkitaan, kuinka monet *Y:n* jäsenistä ovat halutun

erotuksen *komplementin* verran suurempia kuin *X:n* jäsenet.
Y:n jäsen 9 on viittä suurempi kuin X:n jäsen 4. Erotusten 5 lukumäärä 1 tuottaa *seitsemänteen* indeksiin komponentiksi ykkösen.
Y:n jäsen 9 on neljää suurempi kuin X:n jäsen 5. Erotusten 4 lukumäärä 1 tuottaa *kahdeksanteen* indeksiin komponentiksi ykkösen.
Yksikään Y:n jäsen ei ole kolmea suurempi kuin X:n jäsen. *Yhdeksänteen* indeksiin komponentiksi 0.
Y:n jäsenet 9 ja 6 ovat tahoillaan kahta suurempia kuin X:n jäsenet 7 ja 4. Erotusten 2 lukumäärä 2 tuottaa *kymmenenteen* indeksiin komponentiksi kakkosen.
Y:n jäsen 6 on yhtä suurempi kuin X:n jäsen 5. Erotusten 1 lukumäärä 1 tuottaa *yhdenteentoista* indeksiin komponentiksi ykkösen.

Esimerkki 38: esimerkin 12 joukoista muodostetaan vektori vastaavalla tavalla.

Esim. 38 a
{2,3,4,6} = X
{7,10,2} = Y

X:n jäsen 2 on yhtä suuri kuin Y:n jäsen 2. Erotusten 0 lukumäärä 1 tuottaa indeksiin 0 komponentiksi ykkösen.
X:n jäsen 3 on ykkösen verran suurempi kuin Y:n jäsen 2. Erotusten 1 lukumäärä 1 tuottaa indeksiin 1 komponentiksi ykkösen.
X:n jäsen 4 on kahta suurempi kuin Y:n jäsen 2. Erotusten 2 lukumäärä 1 tuottaa indeksiin 2 komponentiksi ykkösen.
Yksikään X:n jäsen ei ole kolmea suurempi kuin Y:n jäsen. Erotusten 3 lukumäärä 0 tuottaa indeksiin 3 komponentiksi nollan.
X:n jäsenet 2 ja 6 ovat tahoillaan neljää suurempia kuin Y:n jäsenet 10 ja 2. Erotusten 4 lukumäärä 2 tuottaa indeksiin 4 komponentiksi kakkosen.
X:n jäsen 3 on viitosen verran suurempi kuin Y:n jäsen 10. Erotusten 5 lukumäärä 1 tuottaa indeksiin 5 komponentiksi ykkösen.
X:n jäsen 4 on kuutosen verran suurempi kuin Y:n jäsen 10. Erotusten 6 lukumäärä 1 tuottaa indeksiin 6 komponentiksi ykkösen.
Y:n jäsen 7 on viittä suurempi kuin *X:n* jäsen 2. Erotusten 5 lukumäärä 1 tuottaa *seitsemänteen* indeksiin komponentiksi ykkösen.
Y:n jäsenet 7 ja 10 ovat tahoillaan neljää suurempia kuin X:n jäsenet 3 ja 6. Erotusten 4 lukumäärä 2 tuottaa *kahdeksanteen* indeksiin komponentiksi kakkosen.
Y:n jäsen 7 on kolmea suurempi kuin X:n jäsen 4. Erotusten 3 lukumäärä 1 tuottaa *yhdeksänteen* indeksiin komponentiksi ykkösen.
Yksikään Y:n jäsen ei ole kahta suurempi kuin X:n jäsen. Erotusten 2 lukumäärä 0 tuottaa *kymmenenteen* indeksiin komponentiksi nollan.
Y:n jäsen 7 on ykkösen verran suurempi kuin X:n jäsen 6. Erotusten 1 lukumäärä 1 tuottaa *yhdenteentoista* indeksiin komponenetiksi ykkösen.
Vektori koottuna:

Esim. 38 b

1	1	1	0	2	1	1	1	2	1	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

X-joukon ja Y:n n:nen transposition leikkauksen *sävelluokkasisältö* selviää jälleen katsomalla, mitkä X-joukon jäsenet osallistuvat n:n tuottaviin erotuksiin. Täten jos X-joukon jäsenistä a,b ja c vähennetään tietyt Y-joukon jäsenet siten että erotus on aina n, merkitsee tämä sitä, että X:llä ja Y-joukon n:nellä transpositiolla on kolmen sävelluokan kokoinen leikkaus ja että tuo leikkaus koostuu sävelluokista a,b ja c.

Tämä vektorinmuodostamismetodi on jossain määrin virhealtis, mutta otin sen mukaan koska sillä on muuan mainio etu: siitä näkee suoraan tietyn *yksittäisen* leikkauksen koon ja sisällön. Tämän vuoksi sitä kannattaakin käyttää tilanteissa, joissa tehtävänasettelu edellyttää vain yhden tai kenties muutaman leikkauksen tutkimista. Toisiin ei tällöin tarvitse kajota lainkaan. Eräissä muissa tavoissahan on aina ensin muodostettava koko vektori, vaikkei kaikkia sen tarjoamista tiedoista tarvittaisikaan.

4.5.1.2. autokorrelaatiovektori ja intervallivektori

Autokorrelaatiovektorin kohdalla tilanne on muuten sama kuin edellä, mutta X:n ja Y:n ollessa sama joukko voi toimenpiteen määritellä X/Y-joukon jokaisen jäsenen vähentämisenä itsestään ja joukon muista jäsenistä.

Tällöin käy ilmeiseksi, miksi autokorrelaatiovektoreissa numeroarvoiltaan komplementtisiin indekseihin tulee aina samankokoiset komponentit. Kun jokainen jäsen vähennetään jokaisesta jäsenestä, on mitä tahansa mielivaltaista vähennettävän ja vähentäjän asetelmaa a-b kohti aina olemassa asetelma b-a, jossa vähennettävä ja vähentäjä ovat vaihtaneet paikkaa. Näiden käänteisten tapausten erotukset ovat numeroarvoiltaan aina toistensa komplementteja. Jos siten tietyn numeroarvon omaavaa erotusta m syntyy n kappaletta, on sen numeroarvoltaan komplementtista erotusta 12-m automaattisesti myöskin n kappaletta.

Komplementtisten indeksien samankokoisten komponenttien vuoksi voidaan intervallivektoria ratkaistaessa tehdä se aikaa säästävä huomio, että X/Y-joukon sävelluokkaparin a,b välisestä kahdesta mahdollisesta vähennyslaskutoimituksesta, a-b ja b-a, tarvitsee suorittaa vain toinen, sillä toisen vaikutus lopputulokseen on jo etukäteen tiedossa. Myöskään itsestään ei jäseniä tarvitse vähentää.

Varsinaisia intervallivektorin muodostamistoimenpiteitä jäsentenvälisen vähennyslaskun avulla on tässä yhteydessä tarpeetonta lähemmin käsitellä, useiden joukkoteoreettisesta kirjallisuudesta löytyvien kuvausten vuoksi.[21]

4.5.2.KÄÄNTEISVEKTORIT

4.5.2.1. eri X:n ja Y:n käänteisvektorit

Käänteisvektoria muodostettaessa jokainen X:n jäsen lasketaan yhteen jokaisen Y:n jäsenen kanssa.

Esimerkki 39: tehtävänä on muodostaa joukkojen -129-/4 eli {4,5,7} ja -237-/4 eli {4,6,9} käänteisvektorit. (Joukot ovat jälleen samat kuin esimerkissä 8). Kuten transpositiovektoreita selvitettäessä, myös nyt X-joukko muodostuu sarakkeiden vasemmanpuoleisista, kussakin sarakkeessa samana pysyvistä numeroista. Kohdassa a) X-joukko on {4, 5,7}. Kohdassa b) X-joukko on {4,6,9}.

Esim.39 a

4+4=8	5+4=9	7+4=11
4+6=10	5+6=11	7+6=1
4+9=1	5+9=2	7+9=4

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.39 b

4+4=8	6+4=10	9+4=1
4+5=9	6+5=11	9+5=2
4+7=11	6+7=1	9+7=4

0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Vektorit ovat tietenkin samanlaiset, sillä yhteenlaskettavien keskinäisellä järjestyksellä ei ole merkitystä: m+n=n+m. X-joukon ja käänteis-Y:n n:nen transposition välisen leikkauksen sävelluokkasisältö selviää katsomalla, mitkä X-joukon jäsenet ovat osallisina n:n tuottavissa summissa. Esim.39 a)-kohdassa muodostuu summia 11 kaksi kappaletta, ja ne sijaitsevat X-joukon jäsenten 5 ja 7 määrittämissä sarakkeissa. Täten X-joukon {4,5,7} ja käänteis-Y:n 11. transposition - ts. Y-joukosta akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen kääntämällä muodostetun joukon - {2,5,7} välinen leikkaus koostuu sävelluokista 5 ja 7.

39 b)-kohdassa muodostuu summia 11 niinikään 2 kappaletta, mutta ne sijaitsevat X-joukon jäsenten 4 ja 6 määrittämissä sarakkeissa. X-joukon {4,6,9} ja käänteis-Y:n 11. transposition (Y-joukosta akselin 5 1/2 - 11 1/2 suhteen kääntämällä muodostetun joukon) {4,6,7} välinen leikkaus koostuu sävelluokista 4 ja 6.

Toimenpidettä voi nopeuttaa samoin kuin transpositionaalivektorien muodostamista. Nyt ainostaan selvitetään, kuinka monta kutakin indeksiä vastaavaa *summaa* X:n ja Y:n jäsenistä on muodostettavissa.

Esimerkki 40: joukko -1128-/2 eli {2,3,4,6} on X ja joukko -345-/7 eli {7,10,2} on Y.

Esim. 40 a
{2,3,4,6} = X
{7,10,2} = Y

X:n jäsenen 2 ja Y:n jäsenen 10 summa on 0. Summien lukumäärä 1 tuottaa 0. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n jäsenen 3 ja Y:n jäsenen 10 sekä X:n jäsenen 6 ja Y:n jäsenen 7 numeroarvojen summa on 1. Summien lukumäärä 2 tuottaa 1. indeksiin komponentiksi kakkosen.

X:n jäsenen 4 ja Y:n jäsenen 10 numeroarvojen summa on 2. Summien lukumäärä 1 tuottaa 2. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n ja Y:n jäsenistä ei ole muodostettavissa summia 3. Summien lukumäärä 0 tuottaa 3. indeksiin komponentiksi nollan.

X:n jäsenen 6 ja Y:n jäsenen 10 sekä X:n jäsenen 2 ja Y:n jäsenen 2 numeroarvojen summa on 4. Summien lukumäärä 2 tuottaa 4. indeksiin komponentiksi kakkosen.

X:n jäsenen 3 ja Y:n jäsenen 2 numeroarvojen summa on 5. Summien lukumäärä 1 tuottaa 5. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n jäsenen 4 ja Y:n jäsenen 2 summa on 6. Summien lukumäärä 1 tuottaa 6. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n ja Y:n jäsenistä ei ole muodostettavissa summia 7. Summien lukumäärä 0 tuottaa 7. indeksiin komponentiksi nollan.

X:n jäsenen 6 ja Y:n jäsenen 2 summa on 8. Summien lukumäärä 1 tuottaa 8. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n jäsenen 2 ja Y:n jäsenen 7 summa on 9. Summien lukumäärä 1 tuottaa 9. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n jäsenen 3 ja Y:n jäsenen 7 summa on 10. Summien lukumäärä 1 tuottaa 10. indeksiin komponentiksi ykkösen.

X:n jäsenen 4 ja Y:n jäsenen 7 summa on 11. Summien lukumäärä 1 tuottaa 11. indeksiin komponentiksi ykkösen.

Esim. 40 b. vektori koottuna

1	2	1	0	2	1	1	0	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Leikkausten sävelluokat selviävät taaskin katsomalla, mitkä X-joukon jäsenistä kunkin summan muotoutumiseen osallistuvat. Tällä vektorioperaatiolla on samat haitat ja edut kuin kohdan 5.1.1 transpositiovektorioperaatiolla. Sitä on mielekkäintä käyttää tietyn yksittäisen leikkauksen koon ja sisällön selvittämiseen.

4.5.2.2. TICS-vektorit

Koska TICS-vektoreita muodostettaessa X ja Y ovat sama joukko, voidaan vektorin muodostamiseksi suoritettava toimenpide ilmaista myös muodossa "X/Y-joukon jokainen jäsen lasketaan yhteen itsensä ja kaikkien muiden jäsenten kanssa".

Esimerkki 41: tehtävänä on muodostaa TICS-vektori X/Y-joukolle -1128-/2 eli {2,3,4,6}.

Esim. 41 a

2+2=4	3+2=5	4+2=6	6+2=8
2+3=5	3+3=6	4+3=7	6+3=9
2+4=6	3+4=7	4+4=8	6+4=10
2+6=8	3+6=9	4+6=10	6+6=0

Esim. 41 b. vektori koottuna:

1	0	0	0	1	2	3	2	3	2	2	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

TICS-vektoreiden muodostaminen suoraan ilman laskutoimitusten kirjoittamista sarakkeisiin on selvästi vaivattomampaa kuin transpositiovektoreiden tai eri X:n ja Y:n käänteisvektoreiden, sillä tällöin toimitaan yhden joukon sisällä.

Kun kaikki jäsenet lasketaan yhteen itsensä ja muiden kanssa, muodostuu kahden eri jäsenen n ja m välille aina kaksi mahdollista yhteenlaskutoimitusta, n+m ja m+n. Sensijaan itsensä kanssa kukin jäsen tulee summatuksi vain kerran, joten summia n+n, m+m jne. voi muodostua vain yksi kutakin. Näistä seikoista voidaan TICS-vektorin muodostamista varten johtaa kaksi käytännöllistä muistisääntöä: jos jokin summa muodostuu joukon kahden eri jäsenen yhteenlaskusta, se kasvattaa summaa vastaavan indeksin komponenttia *kahdella* yksiköllä. Jos taas jokin summa muodostuu joukon jäsenestä laskettuna yhteen itsensä kanssa, se kasvattaa summaa vastaavan indeksin komponenttia *yhdellä* yksiköllä.

Esimerkki 42: muodostetaan TICS-vektori X/Y-joukosta {2,3,4,6}.

Nollan tuottavia summia on 1, 6+6=0. Koska kuutonen lasketaan yhteen itsensä kanssa, kasvattaa se indeksin 0 komponenttia yhdellä yksiköllä. Indeksin 0 komponentiksi siis ykkönen.

Ykkösen tuottavia summia ei ole lainkaan.Indeksin 1 komponentti on 0.

Kakkosen tuottavia summia ei ole lainkaan. Indeksin 2 komponentti on 0.

Kolmosen tuottavia summia ei ole lainkaan. Indeksin 3 komponentti on 0.

Nelosen tuottavia summia on yksi, 2+2. Kakkonen lasketaan yhteen itsensä kanssa, joten se kasvattaa komponenttia yhdellä yksiköllä. Indeksin 4 komponentti on siten 1.

Viitosen tuottavia summia on yksi, 2+3. Koska summa muodostuu kahdesta eri yhteenlaskettavasta, kasvattaa se komponenttiaan kahdella yksiköllä. Indeksin 5 komponentti on 2.

Kuutosen tuottavia summia on kaksi, 3+3 ja 2+4. Edellinen summa muodostuu jäsenen laskemisesta yhteen itsensä kanssa, joten se kasvattaa komponenttia yhdellä yksiköllä. Jälkimmäisen summan tuottaa kaksi jäsentä, joten komponentti kasvaa kahden yksikön verran. Yhteensä 1+2=3. Indeksin 6 komponentti on 3.

Summa seitsemän muodostuu yhdestä laskutoimituksesta, 3+4. Sen tuottaa kaksi eri sävelluokkaa, joten kyseinen komponentti kasvaa kahdella yksiköllä. Indeksin 7 komponentti on 2.

Summa kahdeksan muodostuu kahdesta laskutoimituksesta, 4+4 ja 2+6. Edellinen summa muodostuu jäsenen laskemisesta yhteen itsensä kanssa, joten se kasvattaa komponenttia yhdellä yksiköllä. Jälkimmäisen summan tuottaa kaksi jäsentä, joten komponentti kasvaa kahden yksikön verran. Yhteensä 1+2=3. Indeksin 8 komponentti on 3.

Yhdeksikön tuottavia summia on yksi, 3+6. Summa muodostuu kahdesta eri yhteenlaskettavasta, joten komponentti kasvaa kahdella yksiköllä. Indeksin 9 komponentti on 2.

Summa kymmenen muodostuu yhdestä laskutoimituksesta, 4+6. Sen tuottaa kaksi eri sävelluokkaa, joten komponentti kasvaa kahdella yksiköllä. Indeksin 10 komponentti on 2.

Yhdentoista tuottavia summia ei ole lainkaan. Indeksin 11 komponentti on 0.

Vektori koottuna:

1	0	0	0	1	2	3	2	3	2	2	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 43: muodostetaan TICS-vektori X/Y-joukosta 8-12 A/0 eli -12111123-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,7,9}.

Nollia muodostuu sävelluokkien 0+0, 6+6, 3+9 ja 5+7 summista. Kaksi ensimmäistä paria kasvattavat komponenttia yhdellä yksiköllä kumpikin, 2 jälkimmäistä kahdella yksiköllä kumpikin. Yhteensä 1+1+2+2=6. Indeksin 0 komponentti on 6.

Ykkösiä muodostuu sävelluokkien 0+1, 4+9 ja 6+7 summista. Jokainen pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä, eli yhteensä 2+2+2=6. Indeksin 1 komponentti on 6.

Kakkosia muodostuu sävelluokkien 1+1, 7+7 ja 5+9 summista. Kaksi ensimmäistä paria kasvattavat komponenttia yhdellä yksiköllä kumpikin, viimeinen pari kahdella yksiköllä. Yhteensä 1+1+2=4. Indeksin 2 komponentti on 4.

Kolmosia muodostuu sävelluokkien 0+3 ja 6+9 summista. Kumpikin pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä, yhteensä 2+2=4. Indeksin 3 komponentti on 4.

Nelosia muodostuu sävelluokkien 0+4, 1+3 ja 7+9 summista. Kukin pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä. Yhteensä 2+2+2=6. Indeksin 4 komponentti on 6.

Viitosia muodostuu sävelluokkien 0+5 ja 1+4 summista. Kumpikin pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä, eli yhteensä 2+2=4. Indeksin 5 komponentti on 4.

Kuutosia muodostuu sävelluokkien 0+6, 1+5, 3+3 ja 9+9 summista. Kaksi ensimmäistä paria kasvattavat komponenttia kahdella yksiköllä kumpikin, kaksi jälkimmäistä yhdellä yksiköllä kumpikin. Yhteensä 2+2+1+1=6. Indeksin 6 komponentti on 6.

Summia 7 muodostuu sävelluokista 0+7, 1+6 ja 3+4. Jokainen pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä. Yhteensä 2+2+2=6. Indeksin 7 komponentti on 6.

Kahdeksikkoja muodostuu sävelluokkien 1+7, 3+5 ja 4+4 summista. Kaksi ensimmäistä paria kasvattavat komponenttia kahdella yksiköllä kumpikin, kolmas pari yhdellä yksiköllä. Yhteensä 2+2+1=5. Indeksin 8 komponentti on 5.

Yhdeksikköjä muodostuu sävelluokkien 0+9, 3+6 ja 4+5 summista. Jokainen pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä. Yhteensä 2+2+2=6. Indeksin 9 komponentti on 6.

Kymmeniä muodostuu sävelluokkien 1+9, 3+7, 4+6 ja 5+5 summista. Kolme ensimmäistä paria kasvattavat komponenttia kahdella yksiköllä kukin, neljäs pari yhdellä yksiköllä. Yhteensä 2+2+2+1=7. Indeksin 10 komponentti on 7.

Yhtätoista muodostuu sävelluokkien 4+7 ja 5+6 summista. Kumpikin pari kasvattaa komponenttia kahdella yksiköllä. Yhteensä 2+2=4. Indeksin 11 komponentti on 4.

Vektori koottuna:

6	6	4	4	6	4	6	6	5	6	7	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tämä tapa muistuttaa Rahnin[22] käyttämää, mutta on nopeampi edetessään ilman kirjoitettuja välivaiheita ja niiden kokoamista lopulliseksi vektoriksi. Rahnin mukaan toimittaessa on tietyn yksittäisen leikkauksen koon selvittämiseksi laskettava kaikki muutkin, tämän tavan avulla sensijaan selviää yksittäisen leikkauksen koko suoraan.

X-joukon ja käänteis-Y:n n:nen transposition välisen leikkauksen sävelluokkasisältö ilmenee jälleen tutkimalla, mitkä jäsenet osallistuvat summien n muotoutumiseen.

Esimerkin 43 vektorissa indeksin 10 numeroarvoa vastaavien summien muodostumiseen osallistuivat sävelluokat 1, 3, 4, 5, 6, 7 ja 9. Käänteis-Y:n 10. transpositio on joukko {1,3,4,5,6,7,9,10}. (Toisin ilmaistuna tämä joukko on alkuperäisen joukon {0,1,3,4,5,6,7,9} käännös akselin 5 - 11 suhteen).

Joukon {0,1,3,4,5,6,7,9} ja joukon {1,3,4,5,6,7,9,10} välinen leikkaus muodostuu sävelluokista 1,3,4,5,6,7 ja 9.

4.5.2.3. TICS-vektorin osoittamien leikkausten ominaisuuksista

Edellä esitetty vektorinmuodostustapa tekee ymmärrettäväksi erään ilmiön, joka pätee kaikkiin TICS-vektoreihin: parittomien indeksien komponentit eivät voi koskaan olla parittomia. Parittoman indeksin komponentti on aina parillinen luku tai nolla.

Yhtäältä tälle ilmiölle on selityksenä edellä jo mainittu seikka, että sävelluokan numeroarvo lisättynä itseensä kasvattaa summan numeroarvoa vastaavan indeksin komponenttia yhdellä yksiköllä. Toisaalta kaikille sävelluokille välillä 0-11 on ominaista, että itsensä kanssa yhteenlaskettuina ne antavat summaksi parillisen luvun tai nollan. Nämä summat voivat siis kasvattaa yhdellä yksiköllä vain komponentteja, jotka sijaitsevat parillisen numeroarvon omaavissa indekseissä tai indeksissä 0. Parittomien indeksien komponentteja kasvattavat summat voivat muodostua vain kahden eri sävelluokan yhteenlaskemisesta, joten ne kasvattavat komponenttia automaattisesti aina kahdella yksiköllä.

Toinen kiintoisa havainto on, että mielivaltaisen joukon ja sen mielivaltaisen käännöksen leikkausjoukko on kaikissa olosuhteissa käänteissymmetrinen. Mikäli tyhjää leikkausjoukkoa ei haluta laskea mukaan - vaikka i-avaruudellinen tyhjä joukkokin on symmetria - voidaan todeta, että kaikissa tapauksissa joissa joukon ja sen mielivaltaisen käännöksen leikkausjoukko koostuu sävelluokista, tuo leikkausjoukko on käänteissymmetrinen. Täten jokaisen TICS-vetorin jokainen (nollaa suurempi) komponentti viittaa käänteissymmetriseen leikkausjoukkoon.

Rahn on todennut, että kahden käänteisjoukkoluokkaan kuuluvan joukon *unioni* on aina käänteissymmetrinen.[23] Yhtälailla tämä pätee siis myös kahden käänteisjoukkoluokkaan kuuluvan joukon leikkaukseen. Tämän seikan tutkimiseen ovat leikkausmatriisit oivallinen työväline.

4.5.3. VEKTORIN TARKISTUS

Laskemalla komponentit yhteen voidaan tarvittaessa summittaisesti tarkistaa, että vektori on tullut oikein muodostetuksi. Esimerkin 43 tapauksessa, ja yleensäkin 8-jäsenisten joukkojen TICS-vektorien tapauksissa, tulee komponenttien summan olla 8*8=64. Esimerkin 43 vektorin komponettien summa on 6+6+4+4+6+4+6+6+5+6+7+4=64.

4.6. INTERVALLIVEKTORI INTERVALLIKOSTA

Käsitellessään joukon ja sen transpositioiden välisiä leikkauksia Chrisman esittää pääperiaatteen leikkausten tutkimiseksi intervallikon avulla:

"Given some interval of transposition and the interval-array of a given set, the total number of intervals or sums of successive intervals that are equal to the interval of transposition is the same as the number of pitch classes that will be held invariant between the set and its transposition".[24]

Hieman myöhemmin hän käsittelee joukon ja sen kaikkien transpositioiden tuottamien leikkausten suhdetta joukon kokonaisintervallisisältöön:

"For all intervals of transposition the respective totals of invariants for each interval measure the total (unordered) intervallic content of the set - that is, the number of intervals equal to one semitone, two semitones, three semitones, etc. between any unordered pair of pitches, rather than successive pitches".

Tähän lauseeseen liittyvässä yläviitteessä nro 24 hän toteaa vielä:

"Essentially, these totals of unordered intervals form the basis for the interval vectors in Forte's theory of set-complexes, except that the number in the sixth entry in the interval vectors, giving the total number of intervals in a set that are equal to the tritone, would be equal to half the number of invariants that would occur at a transposition of 6 semitones".

Chrisman käsittelee siis joukon kokonaisintervallisisältöä autokorrelaatiovektorin näkökulmasta. Intervallivektorin käsitteeseen ja sen muotoamiseen autokorrelaatiovektorista hän viittaa hieman epämääräisesti ("...form the basis for interval vectors..."), eikä liioin esitä eksaktia menetelmää intervallivektorin johtamiseksi intervallikon avulla, vaikka se hänen artikkelinsa materiaalin avulla olisi mahdollista.

Tällainen menetelmä on sen vuoksi syytä esittää seuraavassa, sillä intervallivektorin muodostaminen intervallikosta on helpoin ja nopein ja siten myös mielekkäin kaikista manuaalisista ratkaisutavoista.

Intervallivektori muodostetaan intervallikosta tutkimalla, kuinka monta kertaa intervallit 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 a) löytyvät intervallikosta sellaisenaan b) ovat muodostettavissa laskemalla intervallikon vierekkäisiä jäseniä yhteen. Intervallien 1-5 kokonaismäärä intervallivektorissa on a)- ja b)-kohtien summa. Intervallin 6 kokonaismäärä intervallivektorissa on a)- ja b)-kohtien summa jaettuna kahdella.

Toisinsanoen intervallikosta poimitaan sellaisenaan esiintyvät numerot 1-6 ja lasketaan lisäksi vierekkäisiä jäseniä yhteen erilaisina kombinaatioina niin, että summa on korkeintaan kuusi.

Tällöin herää tietenkin kysymys siitä, mitä tehdään intervalleille 7-11, joita ilmiselvästi esiintyy lukuisissa intervallikoissa. Vastaus on: ei mitään. Intervallien 1-6 tutkimisen yhteydessä tulevat myös intervallit 7-11 tutkituiksi, komplementti-intervallien määrän ollessa aina sama.

Jos siis intervallikosta valitaan esimerkiksi intervalli viisi tai rinnakkaisia jäseniä joiden numeroarvojen summa on viisi, jää valinnan ulkopuolelle automaattisesti 5:n komplementti-intervalli 7, joko "puhtaana" intervallina 7 tai useampien vierekkäisten jäsenten seitsemäksi summautuvana yhdistelmänä. Jos intervallikosta valitaan 1, ovat jäljellejäävien jäsenten yhteenlasketut numeroarvot aina 11. Jos intervallikosta valitaan 2, ovat jäljellejäävien jäsenten yhteenlasketut numeroarvot aina 10. Jne. Kun intervallikosta valitaan kuusi, jää jäljelle myös kuusi. Näinollen muista intervalleista poiketen myös kuutosen komplementti on kelvollinen laskettavaksi mukaan. Kuutosten määrä jaetaan kahtia tilanteen "tasa-arvoistamiseksi".

Intervallien etsimisen intervallikosta voi suorittaa missä järjestyksessä tahansa. Lopputuloksen kannalta sillä ei ole mitään merkitystä, mutta virheiden välttämiseksi lienee viisainta edetä järjestyksestä ykkösestä kuutoseen.

Ensin tutkitaan, kuinka monta ykköstä intervallikossa on ja kirjataan löydetty määrä komponentiksi intervallivektorin indeksiin 1. Ykkösten kohdalla tämä riittää, sillä ne eivät voi muodostua b) kohdan tarkoittamassa merkityksessä rinnakkaisten intervallien summista.

Tämän jälkeen tutkitaan sellaisenaan esiintyvien kakkosten määrä ja vierekkäisistä ykkösistä summautuvien kakkosten määrä. Jos tietyssä intervallikossa on esim. neljä vierekkäistä ykköstä, merkitsee tämä intervallivektoriin kolmea kakkosta: kaksi vasemmanpuoleisinta muodostavat ensimmäisen, kaksi keskimmäistä toisen ja kaksi oikeanpuoleisinta kolmannen. Osa ykkösistä voi siten osallistua yhteenlaskettavina useampaan summaan.

Sitten etsitään kolmoset ja kolmosen summaksi antavat vierekkäiset jäsenet. Mahdollisuuksia on yhteensä vain neljä kappaletta: 111, 12, 21, 3.
Neloset voivat olla intervallikossa sellaisenaan tai seuraavien rinnakkaisten jäsenten summina: 1111, 112, 121, 211, 22, 13 ja 31. Vaihtoehtoja on nelonen mukaanluettuna kahdeksan.

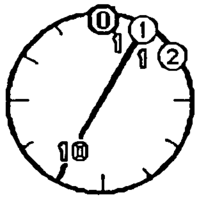
Viitoseksi summautuvia rinnakkaisten intervallien yhdistelmiä on 15 kappaletta: 11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 122, 212, 221, 113, 131, 311, 32, 23, 14 ja 41. Viitonen itse muodostaa kuudennentoista tapauksen.

Kuutoseksi summautuvia rinnakkaisten intervallien yhdistelmiä on 31 kappaletta: 111111, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111, 1122, 1221, 2211, 1212, 2121, 2112, 1113, 1131, 1311, 3111, 114, 141, 411, 15, 51, 123, 132, 213, 231, 312, 321, 222, 24, 42 ja 33. Kuutonen itse on siis 32:s tapaus.

(Ennen siirtymistä esimerkkeihin muistutettakoon tämänkin toimenpiteen kannalta tärkeä seikka: numerojonoesityksessä olevan intervallikon äärijäsenet ovat rinnakkaisia).

Esimerkki 44: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 3-1 intervallikosta -1,1,10- muodostetaan intervallivektori. (Sävelluokkaympyrällä joukkoluokan primaarimuoto).

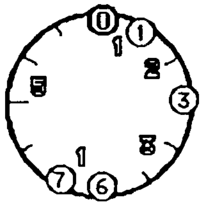
Esim.44



Ykkösiä on 2 kappaletta. Indeksiin 1 komponentiksi kakkonen. Kakkosia ei ole sellaisenaan, mutta kahdesta rinnakkaisesta ykkösestä tulee yhdessä yksi kakkonen. Indeksiin 2 komponentiksi 1. Kolmosia, nelosia, viitosia eikä kuutosia löydy sellaisenaan eikä ole muodostettavissa rinnakkaisten jäsenten summina. Indekseihin 3, 4, 5 ja 6 komponentiksi 0.
Joukkoluokan 3-1 intervallivektori on [210000].

Esimerkki 45: joukkoluokan 5-19 A intervallikosta -12315- muodostetaan intervallivektori. Sävelluokkaympyrällä jälleen joukkoluokan primaarimuoto.

Esim.45



Ykkösiä on 2 kpl. Indeksiin 1 komponentiksi kakkonen.

Kakkosia on sellaisenaan yksi eikä ykkösiä ole useampia rinnakkain, joten kakkosten kokonaismäärä on 1. Indeksiin 2 komponentiksi 1.

Kolmosia on kaksi, ensin 1+2 ja sen oikealla puolella kolmonen sellaisenaan. Indeksiin 3 komponentiksi 2.

Nelosia on 1 kpl. Se muodostuu rinnakkaisten jäsenten 3 ja 1 summasta. Indeksiin 4 komponentiksi 1.

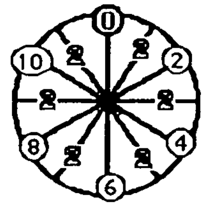
Viitosia on kaksi kappaletta. Toinen muodostuu jäsenten 2 ja 3 summasta ja toinen on oikeassa laidassa sellaisenaan. Indeksiin 5 komponentiksi 2.

Kuutosia on kaikkiaan neljä kappaletta. Vasemmalta lukien 1+2+3, 2+3+1, 1+5 ja (äärijäsenten summa) 5+1. Kokonaismäärä 4 jaetaan kahdella, joten indeksiin 6 tulee komponentiksi 2.

Joukkoluokan 5-19 A intervallivektori on koottuna [212122].

Esimerkki 46: 6-akselisesti kiertosymmetrisen joukkoluokan 6-35 intervallikosta -222222- muodostetaan intervallivektori. Sävelluokkaympyrällä primaarimuoto.

Esim.46



Ykkösiä ei ole lainkaan. Indeksiin 1 komponentiksi 0.

Kakkosia on 6 kpl. Indeksiin 2 komponentiksi 6.

Kolmosia ei ole lainkaan. Indeksiin 3 komponentiksi 0.

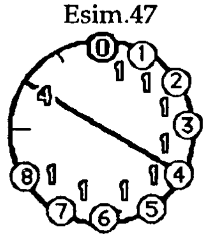
Nelosia on summattavissa rinnakkaisista kakkospareista - äärijäsenet mukaanluettuina - 6 kappaletta. Indeksiin 4 komponentiksi 6.

Viitosia ei ole lainkaan. Indeksiin 5 komponentiksi 0.

Kuutosia on kuusi kappaletta: jokaisesta kakkosesta lähtien voidaan summata kolmen kakkosen muodostama kuutonen. Indeksiin 6 komponentiksi puolet kuudesta eli kolme.

Joukkoluokan 6-35 intervallivektori koottuna: [060603].

Esim.47



Esimerkki 47: yksiakselisesti symmetrisen joukkoluokan 9-1 intervallikos-

ta -111111114- muodostetaan intervallivektori. Ympyrällä joukkoluokan primaarimuoto.

Ykkösiä on kahdeksan kappaletta. Indeksiin 1 komponentiksi 8.

Kakkosia syntyy seitsemän kappaletta, kun ykkösiä lasketaan vasemmalta alkaen kaksittain yhteen - sama ykkönen voi siis osallistua kahteen 1+1 -toimitukseen, sekä vasemman- että oikeanpuoleisena yhteenlaskettavana. Indeksiin 2 komponentiksi 7.

Kolmosia on kuusi kappaletta, niistä kukin kolmen rinnakkaisen ykkösen summana. Nyt voi sama ykkönen osallistua kolmen kolmosen muotoutumiseen, vasemmanpuoleisena, keskimmäisenä ja oikeanpuoleisena yhteenlaskettavana. Indeksiin 3 komponentiksi 6.

Nelosia löytyy niitäkin kuusi, joista viisi kappaletta neljän rinnakkaisen ykkösen summina ja kuudes intervallikon oikeassa laidassa sellaisenaan. Indeksiin 4 komponentiksi 6.

Viitosia on myös kuusi. Neljä kappaletta muodostuu viiden rinnakkaisen ykkösen summana, viides oikeanpuoleisimman ykkösen ja nelosen summana ja kuudes nelosen ja vasemmanpuoleisimman ykkösen summana. Indeksiin 5 komponentiksi 6.

Kuutosia on niinikään kuusi. Vasemmalta lähtien ensin kolme kuuden rinnakkaisen ykkösen summaa, sitten kolmesta oikeanpuoleisimmasta jäsenestä 1+1+4, kahdesta oikeanpuoleisimmasta ja ensimmäisestä vasemmanpuoleisesta 1+4+1 sekä oikeanpuoleisimmasta ja kahdesta vasemmanpuoleisimmasta 4+1+1. Indeksiin 6 tulee komponentiksi puolet kuudesta eli 3.

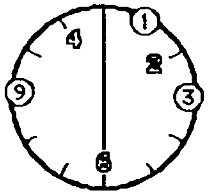
Joukkoluokan 9-1 intervallivektori on koottuna [876663].

4.7. TICS-VEKTORI SÄVELLUOKKAYMPYRÄSTÄ

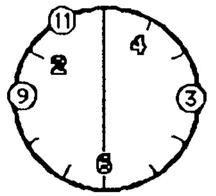
TICS-vektorin muodostaminen suoraan sävelluokkaympyrälle asetetusta joukosta lienee metodeista nopein ja yksinkertaisin. Haluttaessa voidaan tutkia vain yhden yksittäisen leikkauksen koko. Leikkauksen sävelluokkasisältö selviää toimenpiteen avulla suoraan. Toimenpiteen ainoa etukäteisvalmistelu on tutkittavan X/Y-joukon sijoittaminen sävelluokkaympyrälle, mikäli se ei ole jo sijoitettuna sinne valmiiksi.

Metodin perustana on käänteisjoukkoluokkiin kuuluvien joukkojen yhteisten jäsenten ryhmittyminen symmetrisesti sen akselin ympärille, jonka suhteen joukot ovat käännetyt.

Esim.48 a



48 b



Esimerkki 48: sävelluokkaympyrälle sijoitetaan joukko -426-/9, sävelluokkasisällöltään {9,1,3}. Ympyrälle piirretään akseli 0-6. (Esim.48 a). Koska kaksi

joukon jäsentä - sävelluokat 3 ja 9 - sijaitsevat akselista yhtä etäällä, on selvää että käännettäessä joukko akselin 0-6 suhteen kuuluvat sävelluokat 3 ja 9 myös käänteisjoukkoon -246-/9, sävelluokkasisällöltään {9,11,3}. (Esim. 48 b). Käännettäessä kolmosesta on tullut yhdeksän ja päinvastoin. (Normaalijäsenten lihavointi on jätetty pois).

a-kohdan joukkoon kuuluu sävelluokka 1, mutta ei sen kanssa akselin 0-6 suhteen symmetrisesti ryhmittynyttä sävelluokkaa 11. Tällöin akselin 0-6 suhteen käännetyssä käänteisjoukossa (b-kohta) on sävelluokka 11 mutta ei sen kanssa akselin 0-6 suhteen symmetrisesti ryhmittynyttä sävelluokkaa 1. a-kohdan joukon sävelluokka 1 ei siis voi olla yhteinen jäsen molemmille joukoille, koska sillä ei ole parinaan akselin 0-6 suhteen symmetrisesti ryhmittynyttä sävelluokkaa 11. (Jos b-kohdan joukkoon kuuluisi sävelluokka 1, pitäisi a-kohdan joukkoon vastaavasti kuulua sävelluokka 11. Ja koska a-kohdan joukkoon ei kuulu sävelluokkaa 11, ei b-kohdan joukkoon voi kuulua sävelluokkaa 1). Kumpikin joukko tarvitsisi *molemmat* akselin 0-6 suhteen symmetrisesti ryhmittyneet sävelluokat, jotta leikkaus voisi toteutua.

Tämä seikka pätee kaikkiin tapauksiin. Jos kahden käänteisjoukkoluokkiin kuuluvan joukon sävelluokkasisällöt ovat saatettavissa toisikseen akselin a-(a+6) suhteen kääntämällä, ovat joukkojen yhteiset sävelluokat automaattisesti ryhmittyneet symmetrisesti tuon akselin suhteen.

Tästä seuraa se johtopäätös, että yhteiset sävelluokat saa selville kummasta joukosta tahansa. Jos joukolla N on symmetrisesti akselin a-(a+6) suhteen ryhmittyneitä sävelluokkia, ovat nuo sävelluokat automaattisesti jäseninä myös joukossa I^aN, joka syntyy käännettäessä N akselin a-(a+6) suhteen. (Tämä on eräs havainnollistus kohdassa 5.2. 3. esitetylle ilmiölle: käänteisjoukkojen leikkausjoukko on aina käänteissymmetrinen).

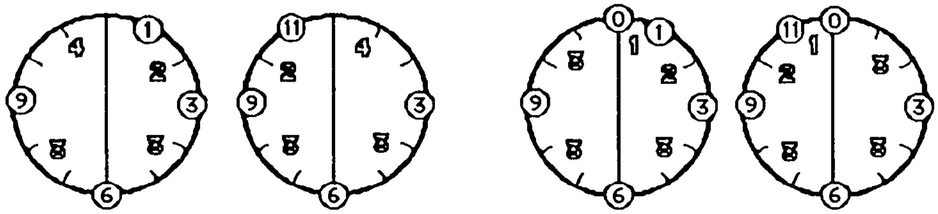
Koska TICS-vektorin kukin indeksi viittaa leikkaukseen tutkittavan X/Y-joukon ja sen käännöksen välillä, joka syntyy käännettäessä X/Y-joukko indeksin numeroarvon puolikasta vastaavan akselin suhteen, voidaan TICS-vektori muodostaa myös "akselilähtöisesti". Tällöin tutkitaan vuoronperään, mitkä joukon jäsenistä ovat ryhmittyneet symmetrisesti kunkin kahdentoista akselin suhteen. Toimenpide on helppo ja sillä on eräänlainen visuaalinen varmistus, sillä on vaivattomampaa *nähdä* sävelluokkien välisiä suhteita kuin laskea niitä.

TICS-vektorin muodostaminen sävelluokkaympyrällä olevasta joukosta tapahtuu kohta kohdalta seuraavasti. Ajatellaan sävelluokkaympyrälle akseli 0-6. (Tai ehkäpä mieluumminkin sijoitetaan jokin sopiva akselista käyvä esine tähän asentoon). Katsotaan ovatko jotkut joukon jäsenistä ryhmittyneet symmetrisesti akselin suhteen, ja sijoitetaan kriteerit täyttävien sävelluokkien lukumäärä komponentiksi indeksiin 0. Tämän jälkeen akseli siirretään asentoon 1/2 - 6 1/2 ja tutkitaan uuden akselin suhteen symmetrisesti ryhmittyneiden sävelluokkien lukumäärä, joka puolestaan kirjataan komponentiksi indeksiin 1. Akseli siirretään asentoon 1-7, selvitetään sen suhteen symmetrisesti ryhmittyneiden sävelluokkien määrä ja merkitään tulos komponentiksi indeksiin 2. Akseli sijoitetaan asentoon 1 1/2 -7 1/2, tutkitaan sen suhteen symmetrisesti ryhmittyneiden sävelluokkien määrä ja merkitään tulos komponentiksi indeksiin 3, jne. Toimenpidettä toistetaan, kunnes akseli on ollut sijoitettuna kaikkiin kahteentoista mahdolliseen asentoonsa, viimeisimpänä indeksiin 11 viittaavaan asentoon 5 1/2 - 11 1/2. (Puheet *yhden* akselin siirtämisestä tai asennosta ovat luonnollisesti tämän toimenpiteen tarpeisiin omaksuttuja epämuodollisia ilmauksia. I-avaruudellisia akseleita on 12 eivätkä ne liiku minnekään, ainoastaan niiden edustaja operaatiossa liikkuu).

Ennen esimerkkejä vielä muuan huomio. Etsittäessä kulloisenkin akselin suhteen symmetrisesti ryhmittyneitä sävelluokkia tulee muistaa, että akselin jommankumman tai molempien kiintopisteiden *kohdalla* saattaa olla sävelluokka. Tällainen sävelluokka kuuluu aina myöskin käänteisjoukkoon ja kasvattaa siten leikkauksen kokoa. (Tulevissa esimerkeissä normaalijäsenet ovat edelleen lihavoimatta).

Esim.49: joukko tapauksia, joissa akselin jommankumman tai molempien kiintopisteiden kohdalla on sävelluokka.

49 a b c d

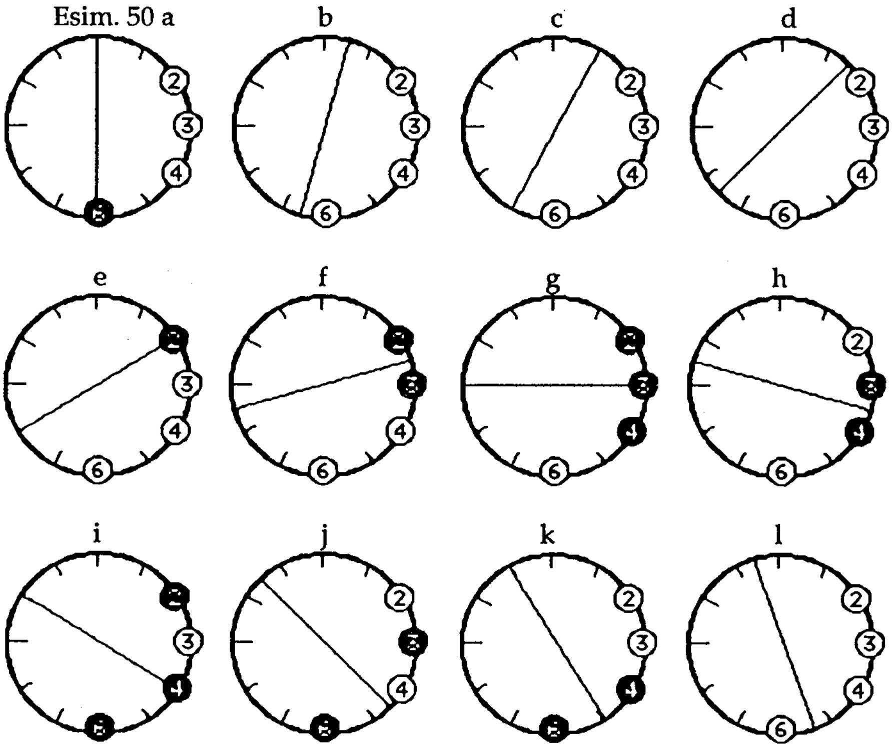


Edellä esitettiin käänteisjoukkojen väliseen leikkaukseen kuulumisen kriteeriksi se, että sävelluokka on akselin suhteen symmetrisessä asetelmassa - jos sävelluokka ei ole akselin kiintopisteen kohdalla, se tarvitsee parin asetelman muodostumiseksi. Jos se taas on akselin kiintopisteen kohdalla, se muodostaa *yksin* symmetrisen asetelman akseliin nähden.

Tästä seuraa luonnollisesti se huomio, että joukon jäsenet voivat olla kiintopisteiden kohdilla vain jos kiintopisteet itse sijoittuvat sävelluokille. Tämän ehdon täyttäviä akseleitahan on kaikista tapauksista puolet eli kuusi kappaletta. Loput kuusi akselia sijaitsevat kiintopisteiltään sävelluokkien väleissä, joten joukkojen jäsenet eivät voi niiden kohdalle osua. Tämä havainnollistaa toisesta näkökulmasta sitä aiemmin TICS-vektoreista todettua seikkaa, että parittoman indeksin komponentti ei voi olla pariton. Komponentti voi kasvaa yhdellä yksiköllä - ja muodostua siten parittomaksi - vain silloin, kun akselin *toisen* kiintopisteen kohdalla on jokin sävelluokka. Tällaiset tapaukset ovat mahdollisia vain kiintopisteiltään sävelluokille sijoittuneille akseleille, so. akseleille jotka (kiintopisteidensä kahdella kertomisen jälkeen) viittaavat vektorin parillisen numeroarvon omaaviin indekseihin tai indeksiin 0.

Esim. 50: tutkitaan symmetriset asetelmat kunkin akselin suhteen sävelluokkaympyrällä olevasta joukosta 4-2 A/2 eli -1128-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,6}. Vastaväreillä merkityt sävelluokat ovat symmetrisessä asetelmassa kulloisenkin akseliin suhteen. Kaikille tapauksille yhteinen intervallikko -1128- on jätetty ympyröistä pois.

Esim. 50 a



Esim.51 a

akseli	sen suhteen symmetr. ryhmitt.sävelluokat	indeksi, johon leikk.viittaa.	leikk. koko
0-6	6	0	1
1/2-6 1/2	-	1	0
1-7	-	2	0
1 1/2-7 1/2	-	3	0
2-8	2	4	1
2 1/2-8 1/2	2/3	5	2
3-9	2/4, 3	6	3
3 1/2-9 1/2	3/4	7	2
4-10	2/6, 4	8	3
4 1/2-10 1/2	3/6	9	2
5-11	4/6	10	2
5 1/2-11 1/2	-	11	0

Esimerkki 51: a-kohdan kaaviossa kauttaviivalla / yhdistetyt sävelluokat ovat symmetrisesti akselin suhteen ryhmittyneitä pareja. Ne kasvattavat

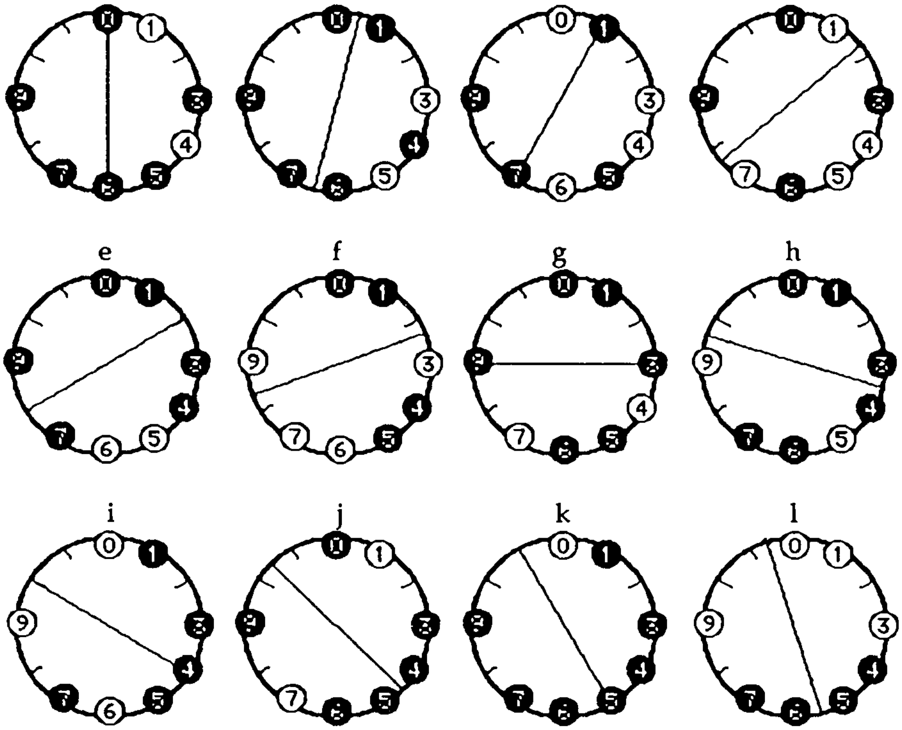
komponenttia kahdella yksiköllä. Yksittäiset sävelluokat ovat akselin kiintopisteen kohdalla olevia joukon jäseniä. Ne kasvattavat komponenttia yhdellä yksiköllä. Kohdassa b kaaviosta koottu TICS-vektori.

Esim. 51 b: TICS-vektori koottuna

1	0	0	0	1	2	3	2	3	2	2	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 52: tutkitaan symmetriset asetelmat kunkin akselin suhteen sävelluokkaympyrällä olevasta joukosta 8-12 A/0 eli -12111123-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,7,9}. Intervallikko on jätetty ympyröistä pois.

Esim. 52 a b c d



Esimerkki 53: esimerkin 52 a-l symmetriset asetelmat koottuna TICS-vektoriksi (kohta 53 a) sekä kaaviona (kohta 53 b, seur. sivu).

Esim. 53 a: TICS-vektori

6	6	4	4	6	4	6	6	5	6	7	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 53 b

akseli	sen suhteen symmetr. ryhmitt. sävelluokat	indeksi, johon leikk. viittaa	leikk. koko
0-6	3/9, 5/7, 0, 6	0	6
1/2-6 1/2	0/1, 4/9, 6/7	1	6
1-7	5/9, 1, 7	2	4
1 1/2-7 1/2	0/3, 6/9	3	4
2-8	0/4, 1/3, 7/9	4	6
2 1/2-8 1/2	0/5, 1/4	5	4
3-9	0/6, 1/5, 3, 9	6	6
3 1/2-9 1/2	0/7, 1/6, 3/4	7	6
4-10	1/7, 3/5, 4	8	5
4 1/2-10 1/2	0/9, 3/6, 4/5	9	6
5-11	1/9, 3/7, 4/6, 5	10	7
5 1/2-11 1/2	4/7, 5/6	11	4

4.8. X:N JA Y:N MUUTOKSET

Leikkausvektorien muodostaminen käsin menetelmällä tai toisella on siinä määrin aikaaviepä ja tarkkuutta vaativa toimenpide, että jouduttaessa suorittamaan se usein kuluu energiaa yhtä paljon operaatioiden mekaaniseen läpiviemiseen kuin itse tulosten tarkasteluun. Tämän vuoksi on syytä ottaa huomioon eri mahdollisuudet vektorien muodostamisen helpottamiseksi ja kaiken informaation irtiottamiseksi jo muodostetuista vektoreista.

Käytännössä nämä mahdollisuudet rajoittuvat tilanteisiin, joissa jonkin jo tunnetun vektorin X-joukko, Y-joukko tai molemmat muuttuvat siten, että uusi X ja/tai uusi Y kuuluvat samaan joukkoluokkaan kuin entinenkin, tai korkeintaan käänteisjoukkoluokkaan. Tällöin uusi vektori on entisen rotaatio tai *käänteisrotaatio*. Olemassaolevasta vektorista voidaan nähdä suoraan muuttuneen asetelman vektori, edellyttäen että on käytössä metodi jolla selvittää, mihin uuden vektorin indekseihin vanhan vektorin indeksien 0-11 komponentit sijoittuvat.

Voidaan esimerkiksi saada selville, että olemassaolevan vektorin jossakin indeksissa, vaikkapa indeksissä 0, sijaitseva komponentti siirtyy muuttuvan tilanteen tuottamassa vektorissa indeksiin 8 ja että muut komponentit sijoitetaan uusiin indekseihinsä samansuuntaisesti kuin olemassaolevan vektorin komponentit: vanhan vektorin indeksin 1 komponentti tulee uudessa indeksiin 9, vanhan vektorin indeksin 2 komponentti tulee uudessa indeksiin 10 jne. On huomattavasti helpompaa kirjoittaa uusi vektori suoraan tämän tiedon varassa kuin ryhtyä laskemaan koko vektoria uudesta lähtöasetelmasta.

Vähentämällä jälkimmäisestä, muuttuneen asetelman indeksistä alkuperäisen asetelman indeksi saadaan selville *kuinka mones* olemassaolevan vektorin rotaatio uusi vektori on. Esimerkkitapauksessa 8-0=8, joten uusi vektori on vanhan 8. rotaatio. Ja yleensä, jos olemassaolevan vektorin indeksissä i sijainnut komponentti sijoittuu muuttuneen asetelman tuottamassa vektorissa indeksiin i+n, on uusi vektori vanhan n:s rotaatio, sillä (i+n)-i=n.

Toisessa tapauksessa voidaan vastaavasti saada selville, että olemassaolevan vektorin indeksissä 0 sijaitseva komponentti siirtyy muuttuvassa tilanteessa uuden vektorin indeksiin 8, mutta että vanhan vektorin indeksien 1-11 komponentit tuleekin sijoittaa uuden vektorin indeksin 8 suhteen käänteisessä järjestyksessä, oikealta vasemmalle. Vanhan vektorin indeksin 1 komponentti tulee uudessa indeksiin 7, vanhan vektorin indeksin 2 komponentti tulee uudessa indeksiin 6 jne.

Laskemalla näiden indeksiparien erotukset voi havaita, että tietyn vektorin ja sen käänteisrotaation toisiaan vastaavien komponenttien etäisyys ei ole vakio - komponenttien muodostamat numerojonot ovat samansisältöiset mutta erisuuntaiset. Tämän vuoksi käänteisrotaation järjestysnumero (numero joka kertoo kuinka mones käänteisrotaatio on kyseessä) määritellään suhteessa alkuperäisen vektorin indeksissä 0 olevaan komponenttiin. Yleensä, jos alkuperäisen vektorin indeksissä 0 ollut komponentti sijoittuu muuttuneen asetelman tuottamassa vektorissa indeksiin n ja indeksien 1-11 komponentit käänteisesti suhteessa siihen, on uusi vektori vanhan n:s käänteisrotaatio. Esimerkkitapauksessa olisi uusi vektori siten vanhan 8. käänteisrotaatio.

4.8.1. MUUTOKSET ERI X:N JA Y:N VEKTOREISSA

Metodit X:n ja/tai Y:n muutosten tuottamien uusien vektorien muodostamiseksi jo tunnetuista vektoreista hyödyntävät samoja seikkoja kuin leikkausmatriisien muodostaminen, eli Y-joukon normaalijäsenen numeroarvon vähentämistä X-joukon normaalijäsenen numeroarvosta (transpositiovektorien tapauksissa) tai Y-joukon normaalijäsenen numeroarvon lisäämistä X-joukon normaalijäsenen numeroarvoon (käänteisvektorien tapauksissa).

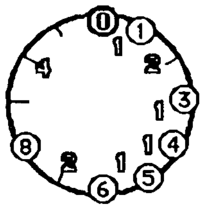
4.8.1.1.transpositiovektorit

X:n ja/tai Y:n muutosten tuottaman uuden transpositiovektorin selvittämiseksi tulee ainoastaan etsiä *tunnetun* vektorin X:n ja Y:n normaalijäsenten erotusta vastaava indeksi ja siirtää sen määrittämä rotaatio (so. tuosta indeksista alkava rotaatio) alkavaksi indeksistä, jonka numeroarvo vastaa *muuttuneen* tilanteen normaalijäsenten erotusta. Siirrettäänkö X-joukkoa, Y-joukkoa vaiko molempia ja kuinka paljon kumpaakin ei muuta operaation suoritustapaa. Tilanteeseen ei myöskään vaikuta se, ovatko X ja Y eri joukkoluokkien jäseniä - jolloin on kyseessä ristikorrelaatiovektori - vai ovatko ne saman joukkoluokan eri jäsenjoukkoja - jolloin on kyseessä eri X:n ja Y:n autokorrelaatiovektori.

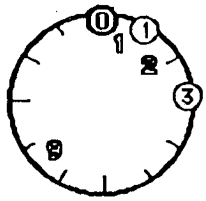
Tarkastelu aloitetaan määrittämällä lähtöasetelma ja muodostamalla siitä vektori. Myöhemmissä esimerkeissä X- ja Y-joukot vaihtuvat joukkoluokkiensa muiksi jäsenjoukoiksi.

Esimerkki 54: muodostetaan transpositiovektori, kun X-joukko on 7-11 A/0 eli -1211124-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,8} (esim. 54 a) ja Y-joukko on 3-2 A/0 eli -129-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3} (esim.54 b). Valmis vektori on esimerkissä 54 c.

Esim.54 a



54 b



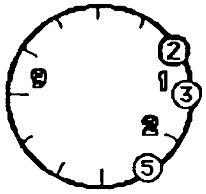
Esim. 54 c

3	2	2	3	2	3	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Y:n normaalijäsenen numeroarvo vähennettynä X:n normaalijäsenen numeroarvosta on 0.

Esimerkki 55: X-joukko on sama kuin esimerkissä 54. Y-joukko puolestaan on -129-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,5}. (Esim.55 a).

Esim.55 a



Muuttunut Y on saman joukkoluokan jäsenjoukko kuin esimerkin 54 Y, sijaiten vastinjäseniltään (myötäpäivään kuljettaessa) kahden puolisävelluokka-askeleen päässä. Y:n normaalijäsenen numeroarvo 2 vähennettynä X:n normaalijäsenen numeroarvosta 0 on 0-2=-2=10.

Esimerkin 54 vektorissa normaalijäsenten erotusta vastanneen indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi indeksistä 10, joka on muuttuneen asetelman normaalijäsenten erotusta vastaava indeksi. Tuloksena on muuttuneen asetelman transpositiovektori. (Esim. 55b).

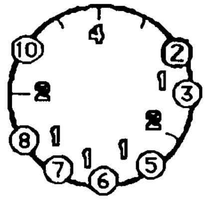
Esim.55 b

2	3	2	3	1	1	1	1	1	1	3	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 54 joukkojen normaalijäsenten erotus 0 vähennettynä esimerkin 55 joukkojen normaalijäsenten erotuksesta 10 on 10-0=10. Uusi vektori on aiemman 10. rotaatio.

Esimerkki 56: X-joukko on 7-11 A/2 eli -1211124-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,5,6,7,8,10}. (Esim.56 a). X on vastinjäseniltään (myötäpäivään kuljettaessa) kahden puolisävelluokka-askeleen päässä esimerkin 54 X-joukosta. Y-joukko on sama kuin esimerkissä 54, 3-2 A/0 eli -129-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3}. Y:n normaalijäsenen numeroarvo 0 vähennettynä X:n normaalijäsenen numeroarvosta 2 on 2.

Esim.56 a



Esimerkin 54 vektorissa normaalijäsenten erotusta vastanneen indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi indeksistä 2, joka on muuttuneen asetelman normaalijäsenten erotusta vastaava indeksi. Muuttuneen asetelman transpositiovektori on esimerkissä 56 b.

Esim.56 b

1	1	3	2	2	3	2	3	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 54 joukkojen normaalijäsenten erotus 0 vähennettynä esimerkin 56 joukkojen normaalijäsenten erotuksesta 2 on 2-0=2. Uusi vektori on aiemman 2. rotaatio.

4.8.1.2. käänteisvektorit

Selvitettäessä X- ja/tai Y-joukkojen muutoksien vaikutuksia käänteisvektoreihin toimitaan muutoin kuten edellä, paitsi että normaalijäsenten numeroarvojen vähentämisen tilalla on niiden yhteenlasku. Etsitään tunnetun käänteisvektorin X:n ja Y:n normaalijäsenten *summaa* vastaavan indeksin määrittämä rotaatio ja siirretään se alkavaksi indeksistä, jonka numeroarvo vastaa uuden tilanteen normaalijäsenten summaa.

Seuraavassa yksi tapaus vertailukohdaksi ja toinen muuttuneen tilanteen selvittämiseksi.

Esimerkki 57: X-joukko on 7-11 A/0 eli -1211124-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,8} ja Y-joukko on 3-2 A/0 eli -129-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3}. Normaalijäsenten summa on 0. Seuraavassa käänteisvektori:

Esim.57

1	2	1	2	3	2	3	2	2	2	0	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 58: X-joukko on sama kuin esimerkissä 57. Y-joukko on -129-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,5}, eli vastinjäseniltään (myötäpäivään kuljettaessa) kahden puolisävelluokka-askeleen päässä esimerkin 57 Y:stä oleva jäsenjoukko. Normaalijäsenten summa on 2.

Esimerkin 57 vektorissa normaalijäsenten summaa vastanneen indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi indeksistä 2, joka on muuttuneen asetelman normaalijäsenten summaa vastaava indeksi. Alla muuttuneen asetelman käänteisvektori.

Esim.58

0	1	1	2	1	2	3	2	3	2	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 57 joukkojen normaalijäsenten summa 0 vähennettynä esimerkin 58 joukkojen normaalijäsenten summasta 2 on 2-0=2. Uusi vektori on aiemman 2. rotaatio.

4.8.2. MUUTOKSET SAMAN X:N JA Y:N VEKTOREISSA

4.8.2.1. autokorrelaatio- ja intervallivektorit

Autokorrelaatiovektoreita tai intervallivektoreita X:n ja Y:n muutokset eivät koske, sillä X/Y-joukon muuttuminen toiseksi säilyttää vektorin ennallaan. Jos vain X tai vain Y muuttuu, on kyseessä eri X:n ja Y:n autokorrelaatiovektori, joihin soveltuvia operaatioita käsiteltiin jo edellä. TICS-vektorien yhteydessä tämänhetkisestä kysymyksenasettelusta sensijaan on hyötyä.

4.8.2.2. TICS-vektorit

Rahn esittää tavan määritellä tutkittavan joukon transponoimisesta TICS-vektorille aiheutuva muutos sekä tutkittavan joukon kääntämisestä ja transponoimisesta aiheutuva muutos.[25] Seuraavassa esitettävät toimenpiteet ajavat samaa asiaa hiukan toiselta näkökulmalta. Joukkoteorian käyttäjä voi niistä valita itselleen parhaiten soveltuvan.

Koska TICS-vektorit ovat käänteisvektoreiden alalaji, niiden lähtöasetelmissa tapahtuvat muutokset ratkeavat periaatteessa samalla tavalla kuin käänteisvektoreiden tapauksissa yleensäkin. X ja Y ovat sama joukko, joten normaalijäsenten numeroarvojen summa saadaan suoraan kertomalla X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kahdella.

Alkuperäisen X/Y-joukon avulla muodostetusta TICS-vektorista etsitään normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa vastaavan indeksin määrittämä rotaatio, ja siirretään se alkavaksi indeksistä, jonka numeroarvo vastaa uuden X/Y-joukon normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa.

Esimerkki 59: X/Y-joukko on 7-11 A/0 eli -1211124-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,8}. Normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 0. Alla TICS-vektori.

Esim.59

4	4	3	2	5	4	5	4	5	6	3	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 60: X/Y-joukko on 7-11 A/2 eli -1211124-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,5,6,7,8,10}. Joukko on vastinjäseniltään edellisen esimerkin joukosta (myötäpäivään kuljettaessa) kahden puolisävelluokka-askeleen päässä sijaitseva jäsenjoukko. Normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 4.

Esimerkin 59 X/Y-joukon normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa vastaavan indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi indeksistä 4, jonka numeroarvo vastaa uuden X/Y-joukon normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa. Tuloksena on joukon 7-11 A/2 TICS-vektori. (Alla).

Esim.60

5	6	3	4	4	4	3	2	5	4	5	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 59 X/Y-joukon kahdella kerrottu normaalijäsen 0 vähennettynä esimerkin 60 X/Y-joukon kahdella kerrotusta normaalijäsenestä 4 on 4-0=4. Uusi vektori on aiemman 4. rotaatio.

Esimerkki 61: X/Y-joukko 7-11 A/4 eli -1211124-/4, sävelluokkasisällöltään {4,5,7,8,9,10,0}, kuuluu samaan joukkoluokkaan kuin kahden edellisen esimerkin X/Y-joukot. Normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 8.

Esimerkin 59 X/Y-joukon normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa vastaavan indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi indeksistä 8, jonka numeroarvo vastaa tämänkertaisen X/Y-joukon normaalijäsenen kaksinkertaista numeroarvoa. Tuloksena on joukon 7-11 A/4 TICS-vektori. (Alla).

Esim. 61

5	4	5	4	5	6	3	4	4	4	3	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkin 59 X/Y-joukon kahdella kerrottu normaalijäsen 0 vähennettynä esimerkin 61 X/Y-joukon kahdella kerrotusta normaalijäsenestä 8 on 8-0=8. Uusi vektori on aiemman 8. rotaatio.

4.8.2.3. TICS-vektorit käännetystä X/Y-joukosta

Tunnetusta TICS-vektorista saadaan käänteisjoukkoluokkaan kuuluvan X/Y-joukon TICS-vektori seuraavasti. Ensiksi, kerrotaan tunnetun vektorin X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kahdella. Toiseksi, tehdään sama toimenpide sille käännetylle X/Y-joukolle, jonka TICS-vektori halutaan. Kolmanneksi, kerrotaan vielä jommankumman intervallikon käänteisosan numeroarvo kahdella. (Käänteisosat ovat aina yhtä suuret, joten on sama kumman valitsee).

Näiden kolmen toimenpiteen tulokset lasketaan yhteen. Uusi TICS-vektori on summaa vastaavan vanhan TICS-vektorin indeksin määrittämä *käänteis*rotaatio (summaa vastaavasta indeksistä alkaen oikealta vasemmalle luettu komponenttien jono). Summa kertoo myös suoraan, kuinka mones alkuperäisen vektorin käänteisrotaatio uusi vektori on.

Esimerkki 62: a-kohdan TICS-vektorin X/Y-joukko on 7-11 A/0 eli -1211124-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,6,8}.

Tämän vektorin avulla muodostetaan TICS-vektori, jonka X/Y-joukko on eräs a-kohdan X/Y-joukon käännöksistä, 7-11 B/5 eli -2111214-/5, sävelluokkasisällöltään {5,7,8,9,10,0,1}.

Alkuperäisen X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 0. Käännetyn X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 10. Intervallikkojen yhtä suuren käänteisosan numeroarvo 8 kerrottuna kahdella on 16=4. Näiden kolmen toimenpiteen summa on 0+10+4=14=2. Uusi TICS-vektori on summaa vastaavan vanhan TICS-vektorin indeksin 2 määrittämä käänteisrotaatio. Joukon 7-11 B/5 TICS-vektori on siten tunnetun vektorin 2. käänteisrotaatio. (Esimerkki 62 b).

Asetelma toimii aina myös toisin päin. Alkuperäinen vektori on *uudessa* vektorissa summaa vastaavan indeksin määrittämä käänteisrotaatio. Esimerkin 62 a vektori on esimerkin 62 b vektorin 2. käänteisrotaatio.

Esim.62 a

4	4	3	2	5	4	5	4	5	6	3	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.62 b

3	4	4	4	3	6	5	4	5	4	5	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 63: kohdan a TICS-vektorin X/Y-joukko on 7-11 A/3 eli -1211124-/3, sävelluokkasisällöltään {3,4,6,7,8,9,11}.

Tämän vektorin avulla muodostetaan TICS-vektori, jonka X/Y-joukko on eräs a-kohdan joukon käännöksistä, 7-11 B/4 eli -2111214-/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,7,8,9,11,0}.

Alkuperäisen X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 6. Käännetyn X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 8. Intervallikkojen yhtä suuren käänteisosan numeroarvo 8 kerrottuna kahdella on 16=4. Näiden kolmen toimenpiteen summa on 6+8+4=18=6. Uusi TICS-vektori on summaa vastaavan vanhan TICS-vektorin indeksin 6 määrittämä käänteisrotaatio. Joukon 7-11 B/4 TICS-vektori on siten tunnetun vektorin 6. käänteisrotaatio, ja päinvastoin. (7-11 B/4:n TICS-vektori esimerkissä 63 b).

Esim.63 a

5	4	5	6	3	4	4	4	3	2	5	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.63 b

4	4	3	6	5	4	5	4	5	2	3	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.9. SYMMETRISTEN JOUKKOLUOKKIEN LEIKKAUSVEKTORIT

Käsitteistöä -luvun kohdassa 3.4. viitattiin jo alustavasti symmetristen joukkoluokkien leikkausvektoreihin. Kiertosymmetristen joukkoluokkien tapauksissa jäsenjoukkoja on vähemmän kuin 12, joten kiertosymmetrisestä X/Y-joukosta muodostettu 12-indeksinen autokorrelaatiovektori sisältää toisteista informaatiota: 6-jäsenjoukkoisten joukkoluokkien tapauksissa jokaisen jäsenjoukon ja vertailtavan joukon leikkaus näkyy kaksi kertaa, 4-jäsenjoukkoisten joukkoluokkien tapauksissa 3 kertaa, 3-jäsenjoukkoisten joukkoluokkien tapauksissa 4 kertaa ja 2-jäsenjoukkoisen joukkoluokan tapauksessa peräti kuusi kertaa.

Kuten aiemminkin on todettu, esitetään vektorin muodostaminen aina tavalla, joka (tämän esityksen termein ilmaistuna) vastaa Y-joukon transponoimista kaikilla kahdellatoista transpositiointervallilla. Kukin indeksi viittaa tällöin numeroarvoaan vastaavaan Y:n transpositioon, riippumatta siitä onko jollakin tai joillakin muilla transpositioilla Y:n symmetriaominaisuuksista johtuen identtinen sävelluokkasisältö. Vektoreissa hyödynnettävä transpositioiden joukko on kaikissa olosuhteissa identtinen instanssiluokan kanssa.

Ilmeinen vaihtoehtohan tälle transpositiolähtöisyydelle olisi joukkoluokkalähtöisyys. Vertailtavan joukon ja kunkin jäsenjoukon välinen leikkaus tutkittaisiin vain kerran, jonka jälkeen toimenpide voitaisiin lopettaa. 6-jäsenjoukkoisen joukkoluokan autokorrelaatiovektori olisi 6-indeksinen, 4-jäsenjoukkoisen 4-indeksinen jne.

Tätä sinänsä mielekästä tapaa vastaan puhuu kuitenkin se, että sen mukana menetettäisiin erityyppisten leikkausvektorien yhtenäinen esitystapa - tähän kysymyksenasetteluunhan jouduttiin ottamaan kantaa jo intervallivektorien yhteydessä. Lisäksi ristikorrelaatiovektorien kohdalla tulisi vastaan tapauksia, joissa molemmat lähtöasetelman joukot ovat kiertosymmetrioita, mutta erijaksoisia. Tällöin muodostuvat vektorit olisivat indeksiensä lukumäärän puolesta erilaisia, riippuen siitä kumpi joukoista kulloinkin olisi X ja kumpi Y.

Tämän vuoksi on mielestäni perusteltua hyväksyä intervallivektori ainoaksi vektorien erikoistapaukseksi sen R-avaruudellisia intervallirakenteita koskevan kuvausvoimaisuuden vuoksi, pysytellä muutoin 12-indeksisissä vektoreissa ja huomioida tapauskohtaisesti symmetristen joukkoluokkien aiheuttamat poikkeustilanteet.

4.9.1. SYMMETRISET SAMAN X:N JA Y:N LEIKKAUSVEKTORIT

4.9.1.1. symmetrisen X/Y-joukon autokorrelaatiovektori

1-akselisesti symmetrisiin joukkoluokkiin kuuluvista X/Y-joukoista muodostetut autokorrelaatiovektorit kuuluvat samaan kategoriaan kuin epäsymmetrisiin joukkoluokkiin kuuluvista X/Y-joukoista muodostetut autokorrelaatiovektorit, koska molemmissa tapauksissa jäsenjoukkoja on yhtä monta kuin transpositioitakin, 12. Jokainen indeksi viittaa sävelluokkasisällöltään erilaiseen transpositioon/jäsenjoukkoon.

Kiertosymmetrisiin joukkoluokkiin kuuluvista X/Y-joukoista muodosteut autokorrelaatiovektorit puolestaan tunnistaa välittömästi siitä, että indeksissä 0 olevan komponentin lisäksi yksi tai useampi muukin komponentti on X/Y-joukon kokoinen. Näiden komponenttien indeksit vastaavat niitä transpositiointervalleja, joilla transponoitaessa joukon sävelluokkasisältö pysyy muuttumattomana.

Vektorin X/Y-joukon kokoisten komponenttien määrä on suoraan verrannollinen X/Y-joukon intervallikon keskenään identtisten jaksojen määrään. Toisinsanoen jos autokorrelaatiovektorissa on n kappaletta X/Y-joukon kokoisia komponentteja, on joukko n-jaksoisesti kiertosymmetrinen ja joukkoluokkiin 6-30 A ja B kuuluvia tapauksia lukuunottamatta myös n-akselisesti käänteissymmetrinen.

X/Y-joukon kokoiset komponentit sijaitsevat aina joukkoluokan jäsenjoukkojen määrää vastaavan intervallin etäisyydellä toisistaan, osoittaen jäsenjoukkokierron kunkin uuden "kierroksen" alkukohdan. Ja koska jäsenjoukkokiertoja mahtuu kiertosymmetristen joukkoluokkien tapauksissa 12:n transposition puitteisiin aina useampia kuin 1, ovat autokorrelaatiovektoritkin tällöin automaattisesti aina jaksollisia - eri jäsenjoukkokiertojen tuottamat komponenttien rivit ovat keskenään identtiset. Myös sävelluokkasisällöltään vertailtavan joukon ja kunkin jäsenjoukkokierron tietyn yksittäisen jäsenjoukon välinen leikkaus on aina sama, vaikka tuo tietty jäsenjoukko on joka kerran syntynyt X/Y-joukon eri transpositiosta.

Esimerkki 64: kohdassa a on autokorrelaatiomatriisi X/Y-joukosta 6-20/0 eli -131313-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,4,5,8,9}. (Joukko on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle *Intervalliavaruudelliset symmetriat* -luvun esimerkissä 29 c). Kohdassa c on matriisista johdettu autokorrelaatiovektori. X/Y-joukko on 3-akselisesti kiertosymmetrinen. Jäsenjoukkoja on 4, joten jäsenjoukkokiertoja mahtuu 12:n transposition puitteisiin 3. Kolme X/Y-joukon kokoista komponenttia ovat sijoittuneet jäsenjoukkojen määrää vastaavan etäisyyden päähän toisistaan. Jäsenjoukkokiertojen tuottamat komponenttien rivit ovat samanlaiset, joten vektori on X/Y-joukon intervallikon tavoin jakautunut kolmeen identtiseen jaksoon.

Matriisista puolestaan on nähtävissä, kuinka eri jäsenjoukkokiertojen yhteydessä samat jäsenjoukot tuottavat samansisältöiset leikkausjoukot vertailtavan joukon kanssa. Vertailtava joukko leikkautuu itsensä kanssa vaakariveillä 0, 4 ja 8. Vaakariveillä 1 ,5 ja 9 se leikkautuu joukkoluokan 1. jäsenjoukon {1,2,5,6,9,10} kanssa, jolloin leikkausjoukoksi muodostuu kullakin kerralla {1,5,9} jne.

Kohdassa b on autokorrelaatiomatriisi X/Y-joukosta 8-28/0 eli -12121212-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,6,7,9,10}. (Joukko on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle *Intervalliavaruudelliset symmetriat* -luvun esimerkissä 31 b). Kohdassa d on matriisista johdettu autokorrelaatiovektori. X/Y-joukko on 4-akselisesti kiertosymmetrinen. Jäsenjoukkoja on 3, joten jäsenjoukkokiertoja mahtuu 12:n transposition puitteisiin 4. Neljä X/Y-joukon kokoista komponenttia ovat sijoittuneet jäsenjoukkojen määrää vastaavan etäisyyden päähän toisistaan. Jäsenjoukkokiertojen tuottamat komponenttien rivit ovat samanlaiset. Vektori on X/Y-joukon intervallikon tavoin jakautunut neljään identtiseen jaksoon.

Matriisista näkyy jälleen vertailtavan joukon ja eri jäsenjoukkokiertojen samojen jäsenjoukkojen tuottamien leikkausjoukkojen samansisältöisyys. Vertailtava joukko leikkautuu itsensä kanssa vaakariveillä 0, 3, 6 ja 9. Vaakariveillä 1 ,4, 7 ja 10 se leikkautuu joukkoluokan 1. jäsenjoukon {1,2,4,5,7,8,10,11} kanssa, jolloin leikkausjoukoksi muodostuu kullakin kerralla {1,4,7,10} jne.

Esim. 64 a

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	●	●			●	●			●	●		
1		●				●				●		
2												
3	●				●				●			
4	●	●			●	●			●	●		
5		●				●				●		
6												
7	●				●				●			
8	●	●			●	●			●	●		
9		●				●				●		
10												
11	●				●				●			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 64 b

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	●	●		●	●		●	●		●	●		0
1		●			●			●			●		1
2	●			●			●			●			2
3	●	●		●	●		●	●		●	●		3
4		●			●			●			●		4
5	●			●			●			●			5
6	●	●		●	●		●	●		●	●		6
7		●			●			●			●		7
8	●			●			●			●			8
9	●	●		●	●		●	●		●	●		9
10		●			●			●			●		10
11	●			●			●			●			11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Esim. 64 c

6	3	0	3	6	3	0	3	6	3	0	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 64 d

8	4	4	8	4	4	8	4	4	8	4	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65: kiertosymmetrisistä X/Y-joukoista johdettuja autokorrelaatiovektoreita.

Kohta a: X/Y-joukko on 2-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 2-6 primaarimuoto -66-/0, sävelluokkasisällöltään {0,6}.

Kohta b: X/Y-joukko on 2-jaksollisen, pelkästään kiertosymmetrisen joukkoluokan 6-30 A primaarimuoto -123123-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,6,7,9}.

Kohta c: X/Y-joukko on 3-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 3-12 primaarimuoto -444-/0, sävelluokkasisällöltään {0,4,8}.

Kohta d: X/Y-joukko on 3-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 9-12 primaarimuoto -112112112-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,2,4,5,6,8, 9,10}.

Kohta e: X/Y-joukko on 4-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-28 primaarimuoto -3333-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9}.

Kohta f: X/Y-joukko on 6-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 6-35 primaarimuoto -222222-/0, sävelluokkasisällöltään {0,2,4,6,8,10}.

Esim. 65 a

2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65 b

6	2	2	4	2	2	6	2	2	4	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65 c

3	0	0	0	3	0	0	0	3	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65 d

9	6	6	6	9	6	6	6	9	6	6	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65 e

4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 65 f

6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

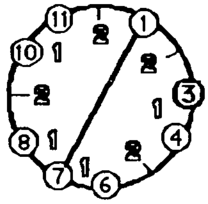
4.9.1.2. symmetrisen X/Y-joukon TICS-vektori

X/Y-joukon kuuluminen käänteissymmetriseen joukkoluokkaan tekee siitä muodostettavasta TICS-vektorista poikkeuksellisen verrattuna TICS-vektoreihin, jotka on muodostettu käänteisjoukkoluokan omaaviin epäsymmetrisiin tai pelkästään kiertosymmetrisiin (6-30 A ja B) joukkoluokkiin kuuluvista X/Y-joukoista. Kun X/Y-joukko kuuluu käänteissymmetriseen joukkoluokkaan, kuuluu myös käänteis-X/Y tuohon samaan joukkoluokkaan, joten muodostuva vektori on samanaikaisesti sekä TICS -vektori että jommankumman tyyppinen autokorrelaatiovektori. Jos X/Y-joukko pysyy akselin 0-6 suhteen käännettäessä itsenään, on TICS-vektori identtinen autokorrelaatiovektorin kanssa. Jos X/Y-joukosta tulee akselin 0-6 suhteen käännetäessä jokin toinen joukkoluokkansa jäsenjoukoista, on kyseessä eri X:n ja Y:n autokorrelaatiovektori, joka on jokin saman X:n ja Y:n autokorrelaatiovektorin rotaatioista.

Esimerkki 66: kohdassa a on sävelluokkaympyrälle sijoitettuna 1-akselisesti symmetrinen joukko 8-26/3 eli -12112122-/3, sävelluokkasisällöltään {3,4,6,7,8,10,11,1}. (Seur. sivu).

Kohdassa b) on joukosta johdettu autokorrelaatiovektori ja kohdassa c) TICS-vektori.

Esim.66 a



Esim.66 b

8	4	5	6	5	6	4	6	5	6	5	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.66 c

5	4	8	4	5	6	5	6	4	6	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Vektorit ovat toistensa rotaatiot. TICS-vektori on autokorrelaatiovektorin 2. rotaatio. Kohdan c vektori on eri X:n ja Y:n autokorrelaatiovektori, sillä akselin 0-6 suhteen käännettäessä joukon {3,4, 6,7,8,10,11,1} sävelluokkasisältö ei pysy muuttumattomana, vaan siitä muodostuu joukko {1,2,4,5,6,8,9,11}.

Jos käänteissymmetrisen joukon tapauksessa tulee muodostettavaksi sen TICS-vektori, on ajan säästämiseksi mielekästä käyttää autokorrelaatiovektorin ja TICS-vektorin samansukuisuuteen perustuvaa metodia. TICS-vektorin muodostamista varten selvitetään tällöin vain yksi seikka: minkä TICS-vektorin indeksin määrittämäksi siirtyy se rotaatio, jonka autokorrelaatiovektorissa määrittää indeksi 0. Tämä seikka ratkaistaan seuraavasti.

Todetaan tutkittavan käänteissymmetrisen joukon normaalijäsenen numeroarvo ja kerrotaan se kahdella. Kaksinkertaiseen normaalijäsenen numeroarvoon lisätään intervallikon *käänteisosan* numeroarvo. Summa osoittaa suoraan, minkä TICS-vektorin indeksin määrittämä rotaatio on identtinen autokorrelaatiovektorin indeksin 0 määrittämän rotaation kanssa. Täten jos summa on n, on TICS-vektori autokorrelaatiovektorin n:s rotaatio.

Autokorrelaatiovektoria useammin on valmiina käytettävissä intervallivektori, lukuisten joukkoteoreettisten esitysten sisältäessä valmiit intervallivektoritaulukot. Käänteissymmetrisen joukon TICS-vektorin voi tällöin yhtä hyvin muodostaa suoraan intervallivektorista. Toimenpide on käytännössä sama kuin äsken. Ensiksi selvitetään X/Y-joukon kaksinkertaisen normaalijäsenen numeroarvon ja intervallikon käänteisosan numeroarvon summan avulla tarvittava TICS-vektorin indeksi. X/Y-joukon autokorrelaatiovektori sijoitetaan tämän indeksin rotaatioksi. Ja koska autokorrelaatiovektoria ei ole valmiina, se todetaan intervallivektorista. TICS-vektorin todetun indeksin - numeroarvoltaan esimerkiksi n - komponentti on automaattisesti X/Y-joukon kokoinen, sen vastatessa autokorrelaatiovektorin indeksin 0 komponenttia. TICS-vektorin indekseihin n+1- n+6 sijoitetaan intervallivektorin komponentit. Intervallivektorin indeksin 6 komponenttia vastaava n+6:n komponentti kerrotaan kahdella. TICS-vektorin indeksien n+7 - n+11 komponentit ovat käänteiset verrattuna indeksien n+1 - n+5 komponentteihin: n+1:n ja n+11:n komponentit ovat samat, samoin n+2:n ja n+10:n jne. Epämuodollisemmin ilmaistuna intervallivektori sijoitetaan TICS-vektorin indeksin n suhteen peilikuvamaisesti, sekä normaalisti vasemmalta oikealle että käänteisessä järjestyksessä oikealta vasemmalle.

Esimerkki 67: esimerkissä 66 käytetyn 1-akselisesti symmetrisen joukon 8-26/3 eli -12112122-/3, sävelluokkasisällöltään {3,4,6,7,8, 10,11,1} TICS-vektori muodostetaan intervallivektorin [456562] avulla.

X/Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo kaksinkertaisena on 6. Intervallikon käänteisosan numeroarvo on 8 (1+2+1+1+2+1). 8+6=14=2. X/Y-joukon kokoinen komponentti, joka autokorrelaatiovektorissa sijaitsisi indeksissä 0, tulee TICS-vektorissa indeksiin 2.

Intervallivektorin komponentit sijoitetaan TICS-vektoriin alkaen indeksistä 2+1=3. Intervallivektorin indeksin 6 komponentti 2, joka sijoittuu TICS-vektorin indeksiin 2+6=8, kerrotaan kahdella. TICS-vektorin jäljellejääviin indekseihin (9, 10, 11, 0 ja 1) tulevat komponentit saadaan kirjoittamalla niihin indeksien 3-7 komponentit päinvastaisessa järjestyksessä siten, että indeksiin 2 nähden symmetrisesti ryhmittyneiden indeksien 3 ja 1, 4 ja 0, 5 ja 11, 6 ja 10 sekä 7 ja 11 komponentit ovat pareittain samat. Alla valmis TICS-vektori.

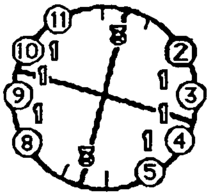
Esim.67

5	4	8	4	5	6	5	6	4	6	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Intervallivektori on ikäänkuin sijoitettu alkamaan indeksistä 2 käsin peilikuvamaisesti sekä vasemmalta oikealle että oikealta vasemmalle.

Esimerkki 68: muodostetaan 2-akselisesti symmetrisen joukon 8-9/2 eli -11131113-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,4,5,8,9,10,11}, TICS-vektori intervallivektorin [644464] avulla. Kohdassa a joukko sävelluokkaympyrällä.

Esim.68 a



Normaalijäsenen numeroarvo kaksinkertaisena on 4. Intervallikon käänteisosan numeroarvo on 3 (1+1+1). 4+3=7. X/Y-joukon kokoinen komponentti, joka autokorrelaatiovektorissa sijaitsisi indeksissä 0, tulee TICS-vektorissa indeksiin 7. Intervallivektorin komponentit sijoitetaan TICS-vektorin indeksistä 7 käsin peilikuvamaisesti vasemmalta oikealle ja oikealta vasemmalle. Valmis TICS-vektori on esimerkissä 68 b.

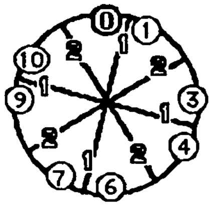
Esim.68 b

6	8	6	4	4	4	6	8	6	4	4	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kuten huomataan, myös indeksiin 1 tuli X/Y-joukon kokoinen komponentti, kun intervallivektorin indeksin 6 komponenttina ollut nelonen kerrottiin kahdella. Syy on tutkittavan joukon 2-akselisuudessa. Koska käänteissymmetrisen joukon TICS-vektori on aina myös (saman tai eri X:n ja Y:n) autokorrelaatiovektori, pätevät siihen myös samat jaksollisuutta, leikkausjoukkojen sävelluokkasisältöä, X/Y-joukon kokoisten komponenttien lukumääriä jne. koskevat lainalaisuudet.

Esimerkki 69: muodostetaan 4-akselisesti symmetrisen joukon 8-28/0 eli -12121212-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,6,7,9,10}, TICS-vektori intervallivektorin [448444] avulla. Kohdassa a joukko sijoitettuna sävelluokkaympyrälle.

Esim.69 a



Normaalijäsenen numeroarvo kaksinkertaisena on 0. Intervallikon käänteisosan numeroarvo on 1. 0+1=1. X/Y-joukon kokoinen komponentti tulee TICS-vektorin indeksiin 1. Intervallivektorin indeksin 6 komponentin kaksinkertaistamisen ja intervallivektorin komponenttien peilikuvamaisen TICS-vektoriin sijoittamisen jälkeen asettuvat muut joukon kokoiset komponentit indekseihin 4, 7 ja 10. Valmis TICS-vektori on kohdassa 69 b.

Esim.69 b

4	8	4	4	8	4	4	8	4	4	8	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.9.2. SYMMETRISET ERI X:N JA Y:N LEIKKAUSVEKTORIT

4.9.2.1. käänteissymmetriat

Jos X tai Y tai molemmat kuuluvat käänteissymmetriseen joukkoluokkaan, ovat transpositio- ja käänteisvektorit toistensa rotaatioita tai käänteisrotaatioita. Perusasetelmia on kaksi: 1) toinen tutkittavista joukoista on käänteissymmetrinen ja toinen epäsymmetrinen. 2) Molemmat joukot ovat käänteissymmetrisiä.

1)

Asetelma 1) jakautuu vielä kahteen alatapaukseen:
a) käänteissymmetrinen joukko on Y:nä
b) käänteissymmetrinen joukko on X:nä.

a)

Kun Y on käänteissymmetrinen joukko, kuuluu käänteisvektorin käänteis-Y aina samaan joukkoluokkaan sen kanssa. Tällöin käänteisvektori on jokin transpositiovektorin rotaatio. Käänteisvektorin muodostamiseksi olemassaolevasta transpositiovektorista tutkitaan, mistä käänteisvektorin indeksistä sijoittuu alkavaksi transpositiovektorin indeksin 0 määrittämä rotaatio. Tämä tieto selviää kertomalla symmetrisen joukon normaalijäsenen numeroarvo kahdella ja lisäämällä siihen intervallikon käänteisosan numeroarvo.

Esimerkki 70: X-joukko on epäsymmetrinen joukko 3-2 A/1 eli -129-/1, sävelluokkasisällöltään {1,2,4}. Y-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 2-1/5 eli -1,11-/5, sävelluokkasisällöltään {5,6}.
Kohdassa 70 a on joukoista johdettu transpositiovektori.

Esim. 70 a

0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tehtävänä on muodostaa käänteisvektori transpositiovektorin avulla. Symmetrisen joukon (Y:n) normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella on 10. Intervallikon käänteisosan numeroarvo 1 lisättynä 10:een on 11. Transpositiovektorin indeksin 0 määrittämä rotaatio siirretään alkavaksi käänteisvektorin indeksistä 11.Käänteisvektori on siten transpositiovektorin 11. rotaatio. Valmis käänteisvektori on kohdassa 70 b.

Esim. 70 b

0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

b)

Kun Y on epäsymmetrinen joukko, kuuluu käänteisvektorin käänteis-Y aina sen käänteisjoukkoluokkaan. Käänteisvektori ja transpositiovektori ovat toistensa käänteisrotaatioita. Käänteisvektorin muodostamiseksi olemassaolevasta transpositiovektorista selvitetään, minkä nimenomaisen käänteisvektorin indeksin määrittämäksi käänteisrotaatioksi transpositiovektori sijoittuu. Indeksin etsiminen tapahtuu täsmälleen samoin kuin edellisessä päinvastaisessa asetelmassa, kertomalla *symmetrisen* joukon (nyt siis X-joukko) normaalijäsenen numeroarvo kahdella ja lisäämällä siihen intervallikon käänteisosan numeroarvo.

Esimerkki 71: edellisen esimerkin X- ja Y-joukot ovat vaihtaneet paikkaa. X-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 2-1/5 eli -1,11-/5, sävelluokkasisällöltään {5,6}. Y-joukko on epäsymmetrinen joukko 3-2 A/1 eli -129-/1, sävelluokkasisällöltään {1,2,4}.

Kohdassa 71 a on joukoista johdettu transpositiovektori.

Esim. 71 a

0	1	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tehtävänä on muodostaa käänteisvektori transpositiovektorin avulla. Symmetrisen joukon normaalijäsenen numeroarvo kerrottuna kahdella ja lisättynä intervallikon käänteisosan numeroarvoon on luonnollisesti sama kuin edellisessäkin esimerkissä eli 11. Olemassaoleva transpositiovektori sijoitetaan käänteisvektorin indeksin 11 määrittämäksi käänteisrotaatioksi. Käänteisvektori on transpositiovektorin 11. käänteisrotaatio.

Valmis käänteisvektori on kohdassa 71 b.

Esim. 71 b

0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2)

Jos lähtöasetelman molemmat joukot ovat käänteissymmetrisiä, kuuluvat käänteisvektorien käänteis-Y:t aina samaan joukkoluokkaan kuin kääntämättömätkin Y:t. Transpositio- ja käänteisvektorit ovat toistensa rotaatioita.

Olemassaolevan transpositiovektorin avulla voidaan muodostaa käänteisvektori lähes samaan tapaan kuin kohdassa 1, jossa normaalijäsenen kahdella kerrotun numeroarvon ja intervallikon käänteisosan numeroarvon summa etsitiin aina symmetrisestä joukosta ja jossa transpositio- ja käänteisvektorin määräytyminen toistensa rotaatioiksi tai käänteisrotaatioiksi riippui symmetrisen joukon asemasta X:nä tai Y:nä. Molempien joukkojen ollessa käänteissymmetrioita etsitään normaalijäsenen kahdella kerrotun numeroarvon ja intervallikon käänteisosan numeroarvon summa aina *Y-joukosta.*

Esim. 72 a

0	0	0	0	0	1	1	2	1	2	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 72: X-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 3-1/3 eli -1,1,10-/3, sävelluokkasisällöltään {3,4,5}. Y-joukko on 1-akselisesti symmet-

rinen joukko 3-6/6 eli -228-/6, sävelluokkasisällöltään {6,8,10}.
Kohdassa 72 a on joukoista johdettu transpositiovektori.
Tehtävänä on muodostaa transpositiovektorin avulla käänteisvektori. Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo 6 kerrottuna kahdella on 0, joka lisättynä intervallikon käänteisosan numeroarvoon 4 (2+2) on 4. Transpositiovektori sijoitetaan käänteisvektorin indeksin 4 määrittämäksi rotaatioksi. Vastaavasti käänteisvektori on transpositiovektrin 4. rotaatio.
Valmis käänteisvektori on kohdassa 72 b.

Esim. 72 b

1	2	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esimerkki 73: edellisen esimerkin X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt X-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 3-6/6 eli -228-/6, sävelluokkasisällöltään {6,8,10}. Y-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 3-1/3 eli -1,1,10-/3, sävelluokkasisällöltään {3,4,5}.
Kohdassa 73 a on joukoista johdettu transpositiovektori.

Esim. 73 a

0	1	1	2	1	2	1	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Transpositiovektorin avulla muodostetaan käänteisvektori. Y-joukon normaalijäsenen numeroarvo 3 kerrottuna kahdella on 6, joka lisättynä intervallikon käänteisosan numeroarvoon 2 (1+1) on 8. Transpositiovektori sijoitetaan käänteisvektorin indeksin 8 määrittämäksi rotaatioksi.
Valmis käänteisvektori on kohdassa 73 b.

Esim. 73 b

1	2	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.9.2.2. kiertosymmetriat

4.9.2.2.1. *lähtoasetelmavaihtoehdot*

Jos joko X tai Y tai molemmat kuuluvat kiertosymmetriseen joukkoluokkaan, on leikkausvektori aina jaksollinen, riippumatta siitä onko kyseessä pelkkä kiertosymmetria vaiko moniakselinen symmetria, transpositiovektori vaiko käänteisvektori.

Transpositio- ja käänteisvektorien välisten lainalaisuuksien suhteen pelkästään kiertosymmetriset joukkoluokat (6-30 A tai 6-30 B) käyttäytyvät epäsymmetristen tavoin, koska niilläkin on käänteisjoukkoluokat. Erityyppisiä perusasetelmia voidaan taas todeta muutamia:

1)

Jos tutkittavista joukoista toinen on pelkästään kiertosymmetrinen joukko ja toinen epäsymmetrinen joukko, kuuluvat molemmissa vaihtoehdoissa Y ja käänteisvektorin käänteis-Y toistensa käänteisjoukkoluokkiin. Koska kumpikaan mahdollinen X ei myöskään ole käänteissymmetrinen joukko, eivät transpositio- ja käänteisvektorit ole sen enempää toistensa rotaatioita kuin käänteisrotaatioitakaan. Vektorit ovat tällaisissa tapauksissa useimmiten kokonaan erilaiset.

Esimerkki 74: X-joukko on epäsymmetrinen joukko 3-11 A/0 eli -345-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,7}. Y-joukko on 2-jaksoinen pelkkä kiertosymmetria 6-30 A/0 eli -123123-/0, sävelluokkasisällöltään {0, 1,3,6,7,9}. Kohdassa a joukoista johdettu transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 74 a

3	1	1	2	1	1	3	1	1	2	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 74 b

2	2	1	2	2	0	2	2	1	2	2	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Vektorit ovat erilaiset, mutta yhdistävänä piirteenä on Y-joukolta molempiin tapauksiin periytyvä 2-jaksoisuus.

2)

Jos taas tutkittavista joukoista toinen on pelkkä kiertosymmetria ja toinen käänteissymmetria, ovat vaihtoehdot samat kuin epäsymmetristen ja käänteissymmetristen joukkojen asetelmissa. (Ks. edell. kohta 9.2.1.). Kiertosymmetrisen joukon ollessa X:nä ovat transpositio- ja käänteisvektorit toistensa rotaatioita, kiertosymmetrisen joukon ollessa Y:nä käänteisrotaatioita.

Esimerkki 75: X-joukko on 1-akselisesti symmetrinen joukko 2-4/0 eli -48-/0, sävelluokkasisällöltään {0,4}. Y-joukko on 2-jaksoinen pelkkä kiertosymmetria 6-30 A/0 eli -123123-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,6,7,9}. Kohdassa a joukoista johdettu transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 75 a

1	1	0	2	1	1	1	1	0	2	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 75 b

1	2	0	1	1	1	1	2	0	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Vektorit ovat toistensa käänteisrotaatiot. Kumpikin vektori on jälleen 2-jaksoinen.

3)

Jos sekä X- että Y-joukko ovat moniakselisia symmetrioita eli yhtaikaisesti sekä kierto- että käänteissymmetrioita, pätee käänteisvektorin muodostamiseen olemassaolevasta transpositiovektorista sama metodi kuin kahden käänteissymmetrisen joukon tapauksissa.

4.9.2.2.2. *symmetrioiden jaksollisuuden vaikutus vektorin jaksollisuuteen*

Kahden kiertosymmetrisen joukon tapauksissa vektorin jaksollisuus seuraa kiintoisalla tavalla intervallikoiden jaksollisuutta. Esimerkeissä 74 ja 75 nähtiin, kuinka intervallikoltaan 2-jaksoinen joukko tuotti sekä epäsymmetrisen että 1-akselisesti symmetrisen joukon kanssa 2-jaksoisen vektorin.

Esimerkki 76: 2-akselisesti symmetrinen joukko 4-25/0 eli -2424-/0, sävelluokkasisällöltään {0,2,6,8} on X-joukko ja 2-akselisesti symmetrinen joukko 8-25/0 eli -11221122-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,2,4,6,7,8,10}, on Y-joukko. Kohdassa a transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 76 a

4	2	4	0	4	2	4	2	4	0	4	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 76 b

4	2	4	2	4	0	4	2	4	2	4	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Molemmat vektorit ovat intervallikkojen tavoin 2-jaksoisia.

Esimerkki 77: 4-akselisesti symmetrinen joukko 4-28/0 eli -3333-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9} on X-joukko ja 2-akselisesti symmetrinen joukko 8-25/0 eli -11221122-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,2,4,6,7,8,10} on Y-joukko. Kohdassa a transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 77 a

2	2	4	2	2	4	2	2	4	2	2	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 77 b

2	4	2	2	4	2	2	4	2	2	4	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kumpikin vektoreista on *sekä* 2- *että* 4-jaksoinen, kummankin intervallikon jaksollisuuden mukaisesti. Transpositiovektorissa on kaksi kertaa jakso 224224, ja tämän edelleenjakautumisen seurauksena neljä kertaa jakso 224. Käänteisvektorissa on vastaava ryhmittyminen.

Jos toinen joukoista on intervallikoltaan 2-jaksoinen ja toinen 3-jaksoinen, tulee kahdentoista komponentin ryhmittyä yhtäältä kahdeksi kuuden komponentin jaksoksi ja toisaalta kolmeksi neljän komponentin jaksoksi. Tällaisissa tilanteissa vektorit jakautuvat jaksoihin siten, että jaksojen määrä vastaa aina vähintään kakkosen ja kolmosen *pienintä yhteistä jaettavaa*, kuutosta.

Esimerkki 78: 2-akselisesti symmetrinen joukko 4-25/0 eli -2424-/0, sävelluokkasisällöltään {0,2,6,8} on X-joukko ja 3-akselisesti symmetrinen joukko 9-12/0 eli -112112112-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,2,4,5,6,8,9,10} on Y-joukko. Kohdassa a transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 78 a

4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 78 b

4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kumpikin vektoreista on sekä 2- että 3-jaksoinen, joukkojen intervallikoiden jaksollisuuksien mukaisesti. Niissä on kaksi kertaa jakso 424242 ja kolme kertaa jakso 4242.
Tällaisessa tilanteessa vektorissa voi olla myös *enemmän* jaksoja kuin olisi intervallikoiden jaksollisuuksien kannalta välttämätöntä.

Esimerkki 79: 3-akselisesti symmetrinen joukko 3-12/0 eli -444-/0, sävelluokkasisällöltään {0,4,8} on X-joukko ja 2-akselisesti symmetrinen joukko 4-9/0 eli -1515-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,6,7} on Y-joukko.
Kohdassa a transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 79 a

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 79 b

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Vektorit ovat jakautuneet mahdollisimman moneen eli kahteentoista jaksoon.

Kiertosymmetriset intervallikot ovat 2-, 3-, 4-, 6-, tai 12-jaksoisia. Edellisen kaltaisia tapauksia, joissa vektorin jaksojen lukumäärä on vähintään intervallikoiden jaksojen lukumäärien pienin yhteinen jaettava, tuottavat myös intervallikoiltaan 3- ja 4- sekä 4- ja 6-jaksoisten joukkojen muodostamat asetelmat. Molemmissa näistä tapauksista pienin yhteinen jaettava on 12. Toisinsanoen *jokainen* intervallikoiltaan 3- ja 4-jaksoisten tai 4- ja 6-jaksoisten joukkojen muodostama lähtöasetelma tuottaa vektorin, jossa kaikki komponentit ovat keskenään yhtä suuria. Tapauksia joissa pienin yhteinen jaettava olisi suurempi kuin 12 ei tasavireisessä sävelavaruudessa ole.

Esimerkki 80: 4-akselisesti symmetrinen joukko 4-28/0 eli -3333-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9} on X-joukko ja 3-akselisesti symmetrinen joukko 6-20/0 eli -131313-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,4,5,8,9} on Y-joukko.
Kohdassa a transpositiovektori, kohdassa b käänteisvektori.

Esim. 80 a

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 80 b

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

4.9.2.2.3. *leikkausjoukkojen sävelluokkasisällöt*

Osajoukot ja osajoukkoluokat-luvun kohdassa 3. tarkasteltiin kiertosymmetristen joukkoluokkien välisiä osajoukkoluokkasuhteita. Tällöin kävi ilmeiseksi, että pidettäessä n-jaksoisesti kiertosymmetrisen joukkoluokan jäsenjoukkoa paikoillaan vertailtavana joukkona ja tutkittaessa toisen, vaikkapa m-jaksoisesti kiertosymmetrisen joukkoluokan jäsenjoukot vuoroin suhteessa siihen, vain m-jaksoisen joukkoluokan symmetriaominaisuuksilla - jäsenjoukkojen määrillä ja kunkin jäsenjoukon itseensätransponoituvuudella - on merkitystä lopputulokseen. n-jaksoisen vertailtavan joukon symmetriaominaisuudet ovat tässä asetelmassa passiiviset.

Läheisesti samantapainen havainto voidaan tehdä tutkittaessa leikkausoukkojen sävelluokkasisältöjä ja niille X- ja Y-joukkojen paikanvaihdosta aiheutuvia muutoksia kahdesta kiertosymmetrisestä joukosta johdetuissa vektoreissa. Tässä kysymyksenasettelussa X-joukko vastaa osajoukkoasetelman paikallaanpidettävää vertailujoukkoa ja Y:n transpositiot m-jaksoista joukkoluokkaa.

Esimerkki 81: X- ja Y- joukot ovat samat kuin esimerkissä 80. 4-akselisesti symmetrinen joukko 4-28/0 eli -3333-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9} on X-joukko ja 3-akselisesti symmetrinen joukko 6-20/0 eli -131313-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,4,5,8,9} on Y-joukko. Joukoista johdettu transpositiomatriisi alla vasemmalla.

Leikkausjoukot muodostavat *Y-joukon* intervallikon jaksojen määrää vastaavasti kolme keskenään identtistä 4-jäsenistä leikkausjoukkojen ryhmää. Kukin ryhmä muodostuu yhden jäsenjoukkokierron tuottamista leikkausjoukoista. Vaakariveille 0, 4 ja 8 sijoittuvat leikkausjoukot koostuvat keskenään samoista sävelluokista, samoin vaakariveille 1,5 ja 9 sijoittuvat leikkausjoukot keskenään jne.

Esim. 81

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	●									●		
1							●			●		
2				●			●					
3	●			●								
4	●									●		
5							●			●		
6				●			●					
7	●			●								
8	●									●		
9							●			●		
10				●			●					
11	●			●								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim. 82

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	●									●			0
1		●			●								1
2						●			●				2
3	●									●			3
4		●			●								4
5						●			●				5
6	●									●			6
7		●			●								7
8						●			●				8
9	●									●			9
10		●			●								10
11						●			●				11
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

Esimerkki 82: joukot ovat samat kuin esimerkissä 81, mutta X ja Y ovat vaihtaneet paikkaa. Nyt 3-akselisesti symmetrinen joukko 6-20/0 eli -131313-

/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,4,5,8,9} on X-joukko ja 4-akselisesti symmetrinen joukko 4-28/0 eli -3333-/0, sävelluokkasisällöltään {0,3,6,9} on Y-joukko. Joukoista johdettu transpositiomatriisi yllä oikealla.

Leikkausjoukot muodostavat edellisen esimerkin tavoin *Y-joukon* intervallikon jaksojen määrää vastaavan määrän keskenään identtisiä leikkausjoukkojen ryhmiä, joista kukin syntyy yhden jäsenjoukkokierron tuloksena. Tällä kertaa on ryhmiä 4 kappaletta, kunkin sisältäessä kolme leikkausjoukkoa. Vaakariveille 0, 3, 6 ja 9 sijoittuvat leikkausjoukot koostuvat keskenään samoista sävelluokista, samoin vaakariveille 1, 4, 7 ja 10 sijoittuvat leikkausjoukot keskenään ja vaakariveille 2, 5, 8 ja 11 sijoittuvat leikkausjoukot keskenään.

Yleensä siis jos Y on intervallikoltaan n-jaksoisesti kiertosymmetrinen joukko, jäsentyvät leikkausjoukot n:ksi keskenään samansisältöiseksi ryhmäksi. Jäsentyminen nimenomaisesti Y-joukon symmetriaominaisuuksien perusteella pätee kaikkiin tapauksiin. X-joukon symmetriaominaisuudet ovat tämän kysymyksenasettelun kannalta passiiviset.

5. KOMPLEMENTTIJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

5. 1. YLEISTÄ

5.1.1. KOMPLEMENTTIJOUKKO,KOMPLEMENTTIPARI

Joukon P *komplementti* (komplementtijoukko) P' muodostuu niistä sävelluokkaympyrän sävelluokista, jotka eivät ole P:n alkioita. Muodollisesti ilmaistuna P' on universaalijoukon U ja joukon P erotus:

$$P' = U \setminus P = C_U P.$$

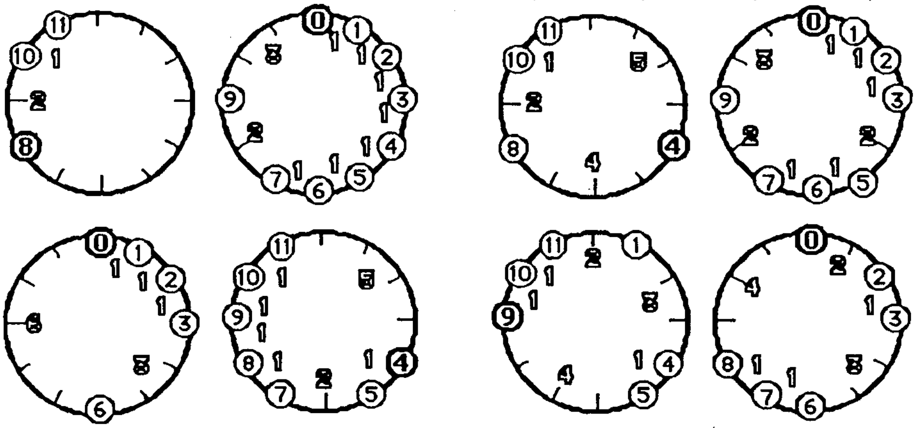
Tällöin P:n ja P':n yhdiste on aina universaalijoukko: $P \cup P' = U$. Vastaavasti P:n ja P':n leikkaus on aina tyhjä joukko: $P \cap P' = \emptyset$. P':n koko on P:n koko vähennettynä kahdestatoista. Jos #P = n, niin #P' = 12-n.

Tämän komplementin määritelmän mukaan siis tietty P' on tietyn P:n komplementti nimenomaan aina U:ssa, vaikka komplementin yleinen määritelmä[1] ei asetakaan ennakkoehtoja sille joukolle, jossa tietty joukko on tietyn toisen joukon komplementti. Komplementtisuhteen määritteleminen ja tarkasteleminen nimenomaisesti U:ssa on joukkoteoriassa omaksuttu käytäntö.[2] Mikäli jossakin tekstissä komplementin käsitettä ei erikseen määritellä, voi automaattisesti olettaa kirjoittajan puhuvan komplementeista universaalijoukon suhteen.[3]

Joukko ja sen komplementtijoukko muodostavat yhdessä *komplementtiparin.*

Esim. 1 a-h: komplementtipareja

1 a) 3-2 B/9 b) 9-2 A/0 c) 4-Z29 B/4 d) 8-Z29 A/0



e) 5-4 A/0 f) 7-4 B/4 g) 6-Z17 A/9 h) 6-Z43 B/0

5.1.2. KOMPLEMENTTI- JA KÄÄNTEISKOMPLEMENTTIJOUKKOLUOKKA

Joukon P edustama joukkoluokka S ja joukon P komplementtijoukon P' edustama joukkoluokka S' ovat *komplementtijoukkoluokkia* (lyhyemmin komplementtiluokkia). Jokaisella S:n jäsenjoukolla on komplementtinaan jokin S':n jäsenjoukoista.

Joukon P edustama joukkoluokka S ja joukon P komplementtijoukon P' mielivaltaisen käännöksen IP' edustama joukkoluokka IS' ovat vastaavasti *käänteiskomplementtijoukkoluokkia* (lyhyemmin käänteiskomplementtiluokkia).

5. 1.3. KOMPLEMENTTILUOKAT FORTEN JOUKKOLUOKITUKSESSA

Allen Forten joukkoluokituksessa komplementtiluokat on nimetty siten, että kokoa osoittava numero on komplementtinen ja järjestysnumero identtinen. 3-2 ja 9-2 ovat komplementtiluokkia, samoin 4-19 ja 8-19, 5-21 ja 7-21 sekä 2-2 ja 10-2 jne. Poikkeuksen tekevät 6-jäseniset Z-suhteiset joukkoluokat, joiden tapauksissa komplementtiluokkien järjestysnumerot eivät ole identtiset. (Esim. 1 g-h).

Forten luokituksessa transpositionaaliset käänteisjoukkoluokat mielletään yhteen kuuluviksi, joten myöskään komplementtiluokkien ja käänteiskomplementtiluokkien välille ei tehdä eroa. Joukkoluokkataulukossa tiettyä (tämän esityksen käsittein) A/B-tyyppistä joukkoluokkaa edustaa sen A-tyyppisen joukkoluokan primaarimuoto. Sama pätee tahollaan myös tuon joukkoluokan (niinikään A/B-tyyppiseen) komplementtiluokkaan. Tästä ei kuitenkaan tule vetää sitä johtopäätöstä, että A-tyyppisen joukkoluokan komplementtiluokka olisi automaattisesti A-tyyppinen, sillä itse asiassa näin on vain muutamassa tapauksessa. Ylivoimaisesti suurimmassa osassa tapauksista A/B-tyyppisen joukkoluokan A-joukkoluokka on A/B-tyyppisen komplementtiluokkansa B-joukkoluokan komplementtiluokka ja päinvastoin.

Täten esimerkiksi joukkoluokan 3-2 B jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 9-2 A jäsenjoukko. (Esim. 1 a-b). Vastaavasti joukkoluokan 3-2 A jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 9-2 B jäsenjoukko.

Joukkoluokan 4-Z29 B jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 8-Z29 A jäsenjoukko. (Esim.1 c-d). Joukkoluokan 4-Z29 A jokaisen jäsenjoukon komplementti puolestaan on joukkoluokan 8-Z29 B jäsenjoukko.

Joukkoluokan 5-4 A jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 7-4 B jäsenjoukko. (Esim.1 e-f). Joukkoluokan 5-4 B jokaisen jäsenjoukon komplementti on vastaavasti joukkoluokan 7-4 A jäsenjoukko.

Joukkoluokan 6-Z17 A jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 6-Z43 B jäsenjoukko. (Esim.1 g-h). Joukkoluokan 6-Z17 B jokaisen jäsenjoukon komplementti on joukkoluokan 6-Z43 A jäsenjoukko jne.

Poikkeuksen tästä komplementtiluokkien A- ja B-tyyppien "ristiin menosta" muodostavat seuraavat tapaukset: [4]

4-12 A:n komplementtiluokka on 8-12 A (4-12 B:n 8-12 B)
4-14 A:n komplementtiluokka on 8-14 A (4-14 B:n 8-14 B)
5-11 A:n komplementtiluokka on 7-11 A (5-11 B:n 7-11 B)
5-26 A:n komplementtiluokka on 7-26 A (5-26 B:n 7-26 B)
5-28 A:n komplementtiluokka on 7-28 A (5-28 B:n 7-28 B)
6-Z10 A:n komplementtiluokka on 6-Z39 A (6-Z10 B:n 6-Z39 B)
6-14 A:n komplementtiluokka on 6-14 A itse, 6-14 B:n 6-14 B.

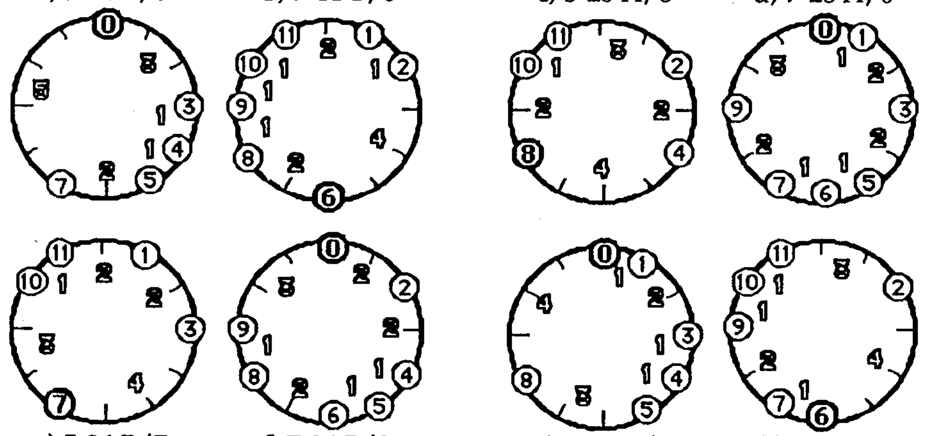
Kuten tapausjoukko osoittaa, ovat käänteisjoukkoluokat 6-14 A ja B ainoat epäsymmetriset tai pelkästään kiertosymmetriset (siis ei-käänteissymmetriset) 6-jäseniset joukkoluokat, jotka ovat itsekomplementoivia. Loput 26 tähän kategoriaan kuuluvaa joukkoluokkaa - 13 A/B-tyyppistä ei-Z-suhteista joukkoluokkaa - ovat "käänteisitsekomplementoivia". A:n jäsenjoukon komplementti on B:n jäsenjoukko ja päinvastoin. Nämä joukkoluokat ovat toisinsanoen omia käänteiskomplementtiluokkiaan.

A-tyyppinen joukkoluokka on A-tyyppisen tai B-tyyppinen B-tyyppisen komplementtiluokka kaikkaan 14:ssa tapauksessa, jotka on esityksen lopussa olevassa joukkoluokkataulukossa merkitty A:sta A:han ja B:stä B:hen osoittavilla nuolilla. Esimerkissä 2 a-h on nähtävissä muutamia näiden tapausten piiriin kuuluvia komplementtipareja sävelluokkaympyröille sijoitettuina.

Ristiin A:sta B:hen ja B:stä A:han komplementoivia tapauksia on 128.

Esimerkki 2:

a) 5-11 B/0 b) 7-11 B/6 c) 5-28 A/8 d) 7-28 A/0



e) 5-26 B/7 f) 7-26 B/0 g) 6-14 A/0 h) 6-14 A/6

5. 2. KOMPLEMENTTIJOUKKOJEN JA -LUOKKIEN LEIKKAUSVEKTORIT

5. 2.1. INTERVALLIVEKTORIT

Joukkoluokan S intervallivektorin ja S:n komplementtiluokan S' intervallivektorin vastinindeksien komponenttien välillä vallitsee tarkoin määriteltävissä oleva suhde. Toisesta vektorista voi aina muodostaa toisen.

S:n ja S':n kardinaalisuuksien *erotuksen itseisarvo*, $|\#S-\#S'|$ on yhtä suuri kuin S:n ja S':n intervallivektorien tietyn vastinindeksin i (mikä tahansa välillä 1-5) komponenttien k_i ja k'_i erotuksen itseisarvo, $|k_i-k'_i|$.

$$|\#S-\#S'| = |k_i-k'_i|.$$

S:n ja S':n kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo *jaettuna kahdella* on yhtä suuri kuin S:n ja S':n intervallivektorien vastinindeksin 6 komponenttien k_6 ja k'_6 erotuksen itseisarvo jaettuna kahdella.

$$\frac{|\#S-\#S'|}{2} = \frac{|k_6-k'_6|}{2}$$

Jos S:n tunnetusta intervallivektorista muodostetaan S':n intervallivektori ja #S < #S', niin kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo *lisätään* S:n indeksien 1-5 komponentteihin, ja erotuksen itseisarvon puolikas indeksin 6 komponenttiin. Tuloksena on S':n intervallivektori.

Esimerkki 3: joukkoluokan 5-6 B intervallivektori on [311221]. Sen avulla muodostetaan komplementtiluokan 7-6 A intervallivektori. Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on $|5-7| = 2$. Näinollen joukkoluokan 7-6 A intervallivektorissa indeksien 1-5 komponentit ovat kahden yksikön verran suuremmat ja indeksin 6 komponentti yhden yksikön (2/2 = 1) verran suurempi kuin vastaavat komponentit 5-6 B:n intervallivektorissa. 7-6 A:n intervallivektori on [533442].

Jos S:n tunnetusta intervallivektorista muodostetaan S':n intervallivektori ja #S > #S', niin kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo *vähennetään* S:n indeksien 1-5 komponenteista, ja erotuksen itseisarvon puolikas indeksin 6 komponentista. Tuloksena on S':n intervallivektori.[5]

Esimerkki 4: joukkoluokan 9-1 intervallivektori on [876663]. Sen avulla muodostetaan komplementtiluokan 3-1 intervallivektori. Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on $|9-3| = 6$. 3-1:n intervallivektorissa indeksien 1-5 komponentit ovat kuuden yksikön verran pienemmät ja indeksin 6 komponentti kolmen (6/2 = 3) yksikön verran pienempi kuin vastaavat komponentit 9-1:n intervallivektorissa. 3-1:n intervallivektori on siten [210000].

Ylläolevasta seuraa, että komplementtisesti toisiinsa suhtautuvien heksakordien intervallivektori on aina identtinen, kuuluivatpa komplementtiparin jäsenet samaan joukkoluokkaan, käänteisjoukkoluokkiin tai (Z-suhteisissa tapauksissa) kokonaan eri joukkoluokkiin. Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on aina 0, joka vähennettynä komponenteista tai lisättynä niihin pitää ne tietenkin entisellään.[6]

5. 2.2. AUTOKORRELAATIOVEKTORIT

Komplementtiparin intervallivektoreita koskevat lainalaisuudet pätevät myös autokorrelaatiovektoreihin. Indeksin 6 komponenttia ei autokorrelaatiovektoreissa puoliteta, joten kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo osoittaa myös vastinindeksien 6 tapauksessa komponenttien erotuksen itseisarvon. Useiden kirjoittajien teksteissä komplementin käsitteen yhteydessä ovat eri vektoreista tarkasteltavina nimenomaisesti autokorrelaatiovektorit eivätkä intervallivektorit. Tätä seikkaa ei välttämättä erikseen mainita.[7]

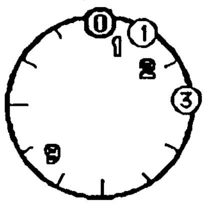
5. 2.3. TICS-VEKTORIT

Komplementtijoukkojen TICS-vektoreiden välillä vallitsee samanlainen vastaavuus kuin autokorrelaatiovektoreidenkin välillä. Kaikkien vastinindeksien komponenttien erotuksen itseisarvo vastaa kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvoa.

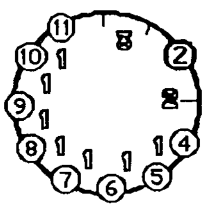
Sekä tietyllä joukolla että koko sen edustamalla joukkoluokalla on yksi yhteinen intervallivektori ja yksi yhteinen autokorrelaatiovektori. Joukolla on yksi TICS-vektori, mutta joukkoluokalla useimmiten kuusi erilaista, jotka ovat toistensa rotaatioita. Tämän vuoksi tulee huomata, että intervalli- ja autokorrelaatiovektorien tapauksista poiketen ei kahden toisiinsa komplementtisesti suhtautuvan joukon TICS-vektoreita tarkasteltaessa automaattisesti tarkastella myös noiden joukkojen edustamien joukkoluokkien TICS-vektoreita. Suoraa vastaavuutta ei ole.

Esimerkki 5: joukko 3-2 A/0 eli -129-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3}, on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle esimerkissä 5 a. Sen TICS-vektori on esimerkissä 5 c.

Esim.5 a



5 b



Edellisen joukon komplementtijoukko 9-2 B/2 eli -211111113-/2, sävelluokkasisällöltään {2,4,5,6,7,8,9,10,11}, on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle esimerkissä 5 b. Sen TICS-vektori on puolestaan esimerkissä 5 d.

Esim.5 c

1	2	1	2	2	0	1	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

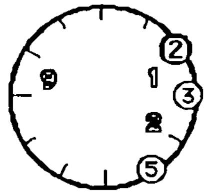
Esim.5 d

7	8	7	8	8	6	7	6	6	6	6	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

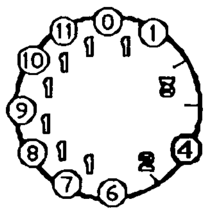
Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on |9-3| = 6. Suuremman joukon TICS-vektorin kaikki komponentit ovat kuuden yksikön verran suuremmat kuin pienemmän joukon TICS-vektorin vastinindeksien komponentit. Vektoreilla on siis ikäänkuin sama "profiili", komponenttien koot vain poikkeavat toisistaan.

Esimerkki 6: kohdassa a on äskeisen esimerkin pienemmästä joukosta sävelluokkaympyrällä myötäpäivään mentäessä vastinjäseniltään kahden puolisävelluokka-askeleen päässä oleva joukko 3-2 A/2 eli -129-/2, sävelluokkasisällöltään {2,3,5}. Sen TICS-vektori on esimerkissä 6 c.

Esim. 6 a



6 b



Sen komplementtijoukko on 9-2 B/4 eli -211111113-/4, sävelluokkasisällöltään {4,6,7,8,9,10,11,0,1}. (Kohta b). Tämän joukon TICS-vektori on kohdassa 6 d.

Esim.6 c

0	0	0	0	1	2	1	2	2	0	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

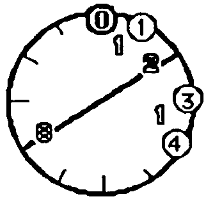
Esim.6 d

6	6	6	6	7	8	7	8	8	6	7	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

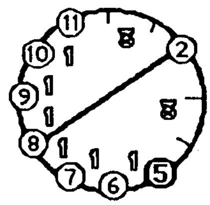
Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on luonnollisesti sama kuin edellisessa esimerkissä eli 6. Suuremman joukon TICS-vektorin kaikki komponentit ovat kuuden yksikön verran suuremmat kuin pienemmän joukon TICS-vektorin vastinindeksien komponentit. 6 c:n vektori on 5 c:n 4. rotaatio, samoin 6 d 5 d:n.

Esimerkki 7: kohdassa 7 a on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle yksiakselisesti symmetrinen joukko 4-3/0 eli -1218-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4}. (Seur.sivulla). Sen TICS-vektori on esimerkissä 7 c. Sen 1-akselisesti symmetrinen komplementtijoukko 8-3/5 eli -11111133-/5 , sävelluokkasisällöltään {5,6,7,8,9,10,11,2}, on sijoitettuna sävelluokkaympyrälle kohdassa 7 b. Tämä joukon TICS-vektori on kohdassa 7 d.

Esim. 7 a



7 b



Esim.7 c

1	2	1	2	4	2	1	2	1	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.7 d

5	6	5	6	8	6	5	6	5	4	4	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on |8-4| = 4. Suuremman joukon TICS-vektorin kaikki komponentit ovat neljän yksikön verran suuremmat kuin pienemmän joukon TICS-vektorin vastinindeksien komponentit.

Esimerkki 8: joukon 6-Z10 A/0 eli -121125-/0, sävelluokkasisällöltään {0,1,3,4,5,7}, TICS-vektori on esimerkissä 8 a.
Sen komplementtijoukon 6-Z39 A/6 eli -211134-/6, sävelluokkasisällöltään {6,8,9,10,11,2}, TICS-vektori on esimerkissä 8 b.

Esim.8 a

3	2	2	2	4	4	3	4	5	2	3	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Esim.8 b

3	2	2	2	4	4	3	4	5	2	3	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Kardinaalisuuksien erotuksen itseisarvo on |6-6| = 0. Vastinindeksien komponentit ovat yhtä suuret ja vektorit näinollen identtiset.

5. 3. KOMPLEMENTTILUOKKIEN OSAJOUKKOLUOKKASUHTEET

Erään näkökulman komplementtiluokkiin muodostavat niiden osajoukkoluokkasuhteet. Komplementtiparin välillä osajoukkosuhde ei tietenkään toteudu koskaan, sillä toisen joukon jäseninä ovat juuri ne sävelluokat, jotka toisesta puuttuvat.

Komplementtiluokkien välisten osajoukkoluokkasuhteiden tarkastelu muistuttaa toimenpiteenä eri X:n ja Y:n transpositiovektorin muodostamista. Poikkeuksena on se, että huomio kiinnitetään pelkästään pienemmän joukkoluokan kokoisiin leikkauksiin, ei muihin. Käytännön toimenpide on jälleen se, että jommankumman joukkoluokan jäsenjoukkoa pidetään paikoillaan vertailukohtana ja toisen jäsenjoukkoja verrataan siihen yksi kerrallaan. Riippuen siitä, valitaanko suuremman vai pienemmän joukkoluokan jäsenjoukko vertailtavaksi joukoksi, olisi näkökulmia jälleen periaatteessa kaksi. Kuitenkin, eräistä leikkausvektoreista poiketen tuottavat komplementtiluokkia tutkittaessa molemmat vaihtoehdot aina eri teitä saman informaation, joten vaihtoehdoista voi valita kumman tahansa.

Epäsymmetristen ja pelkästään kiertosymmetristen komplementtiluokkien osajoukkoluokkasuhteet ovat monimutkaisemmat kuin käänteissymmetristen, sillä niiden tapauksissa voidaan aina tutkia osajoukkoluokkasuhteet myös käänteiskomplementtiluokan kanssa.

A-tyyppisellä joukkoluokalla on tietynlainen osajoukkoluokkasuhde sekä komplementti-B:nsä että (käänteis)komplementti-A:nsa kanssa, B-tyyppisellä joukkoluokalla samoin. A-tyyppisellä joukkoluokalla on aina samanlainen osajoukkoluokkasuhde komplementti A:han kuin B-tyyppisellä joukkoluokalla on komplementti-B:hen. Vastaavasti A-tyyppisellä joukkoluokalla on aina samanlainen osajoukkoluokkasuhde komplementti-B:hen kuin B-tyyppisellä joukkoluokalla on komplementti-A:han.

Tämän vuoksi on seuraavassa otettu käyttöön yksinkertainen merkintätapa, jossa on kaksi numeroa kauttaviivan yhdistäminä, esim. 4/2, 1/3, 1/1 jne. Kauttaviivan *vasemmalla* puolella oleva numero ilmaisee, kuinka monta kertaa kukin A-joukkoluokan jäsenjoukko on osajoukkosuhteissa komplementti-A:nsa jäsenjoukkoihin ja kuinka monta kertaa kukin B-joukkoluokan jäsenjoukko on osajoukkosuhteissa komplementti-B:nsä jäsenjoukkoihin.

Kauttaviivan *oikealla* puolella oleva numero ilmaisee, kuinka monta kertaa kukin A-joukkoluokan jäsenjoukko on osajoukkosuhteissa komplementti-B:nsä jäsenjoukkoihin ja kuinka monta kertaa kukin B-joukkoluokan jäsenjoukko on osajoukkosuhteissa komplementti-A:nsa jäsenjoukkoihin. Muistisääntönä on, että lukuparin vasen jäsen kertoo osajoukkosuhteista samantyyppisten joukkoluokkien välillä, oikeanpuoleinen käänteistyyppisten joukkoluokkien välillä. Esityksen lopussa liitteenä olevassa joukkoluokkataulukossa on merkitty kunkin "komplementtiluokkakehikon" yläosaan joukkoluokkia koskevat osajoukkoluokkatiedot.[8]

Esimerkki 9: A/B-tyyppisten komplementtiluokkien 3-2 ja 9-2 lukupari 6/5 tarkoittaa, että kukin 3-2 A:n jäsenjoukko on osajoukkosuhteessa kuuteen 9-2 A:n jäsenjoukkoon ja viiteen 9-2 B:n jäsenjoukkoon. Vastaavasti kukin 3-2 B:n jäsenjoukko on osajoukkosuhteessa kuuteen 9-2 B:n jäsenjoukkoon ja viiteen 9-2 A:n jäsenjoukkoon.

Komplementtiluokkien symmetriatyyppi on aina sama, joten lukuparin 6/5 voi tulkita myös siten, että kullakin 9-2 A:n jäsenjoukolla on osajoukkonaan kuusi 3-2 A:n jäsenjoukkoa ja viisi 3-2 B:n jäsenjoukkoa jne.[9]

A/B-tyyppisten komplementtiluokkien osajoukkoluokkasuhteita kuvaavia lukupareja tutkimalla voi huomata, että useimmissa tapauksissa lukuparin jäsenet ovat erisuuruisia, ja että lähes kaikissa erisuuruisissa tapauksissa oikeanpuoleinen jäsen on pienempi.

Toisaalta aiemmin todettiin, että A-tyyppisen joukkoluokan komplementtiluokka on useimmiten B-tyyppinen ja päinvastoin. Koska lukuparin oikeanpuoleinen jäsen kuvaa osajoukkoluokkasuhteita juuri ristiin menevien komplementtisten A- ja B-tyyppisten ja B- ja A-tyyppisten joukkoluokkien välillä, johtuu arvelemaan että joukkoluokan ja sen *käänteis*komplementtiluokan välillä toteutuu osajoukkoluokkasuhde yleensä useammin kuin joukkoluokan ja sen komplementtiluokan välillä.

Asia on todellakin näin, sillä tutkittaessa niitä muutamaa tapausta joissa lukuparin oikeanpuoleinen jäsen on suurempi, käy ilmi että kyseessä ovat ne aiemmin esitellyt tapaukset, joissa A:n komplementtijoukkoluokka on A ja B:n B. Tällöinhän lukuparin oikeanpuoleinen jäsen kuvaa poikkeuksellisesti joukkoluokan ja käänteiskomplementtiluokan välisiä osajoukkoluokkasuhteita. Tarkkaan ottaen osajoukkoluokkasuhde joukkoluokan ja sen komplementtiluokan välillä ei toteudu *kertaakaan* useammin kuin osajoukkoluokkasuhde joukkoluokan ja sen käänteiskomplementtiluokan välillä. Yhtä usein se toteutuu vain neljässä tapauksessa: 5-3/7-3 (1/1), 5-11/7-11 (1/1), 5-21/7-21 (3/3) ja 5-27/7-27 (1/1).

Tästä näkökulmasta on kiintoisaa tarkastella ns. *maverick sonorityn* tapausta.[10] Kyseessä ovat yksiakselisesti symmetriset komplementtiluokat 5-12 ja 7-12, joiden välille ainoana tapauksena koko Forten metodein määritellyssä joukkoluokka-avaruudessa (käänteisjoukkoluokat ovat yhdessä) ei synny komplementtiluokkien välistä osajoukkoluokkasuhdetta lainkaan.

Komplementtiluokkien välisiä osajoukkoluokkasuhteita kuvaavia lukupareja tarkemmin tutkimalla voi havaita, että useissa tapauksissa komplementtiluokkaan viittaavaa jäsen - eli useimmiten oikeanpuoleinen - on nolla. Tämä merkitsee käytännössä sitä, että eroteltaessa Forten luokituksesta poiketen käänteisjoukkoluokat omiksi yksiköikseen ei kyseisten komplementtiluokkien välille synny osajoukkoluokkasuhdetta.

Näinollen transpositionaalisen joukkoluokituksen kannalta ei ole mitään erikoista siinä, että maverick sonorityn komplementtiluokkien välillä ei osajoukkoluokkasuhde toteudu kertaakaan. Tämä asiaintila vallitsee peräti 47:ssä tapauksessa, maverick sonorityssä ja 23:ssa A/B-tyyppisessä tapauksessa. Näistä 46:ssa tapauksessa eli kaikissa 23:ssa A/B-tyyppisessä tapauksessa toteutuu osajoukkoluokkasuhde kuitenkin käänteiskomplementtiluokan kanssa. Joukkoluokat 5-12 ja 7-12 ovat osajoukkoluokkasuhteita toteuttamattomista komplementtiluokkapareista ainoat käänteissymmetriset, joten niiden kohdalla osajoukkoluokkasuhde ei voi toteutua myöskään käänteiskomplementtiluokan avulla, koska se on sama kuin komplementtiluokka.

Transpositionaalisen joukkoluokituksen kannalta maverick sonorityn erikoisasema häviää siten 46:n muun osajoukkoluokkasuhdetta toteuttamattoman komplementtiluokkaparin joukkoon. Kiinnostavaksi kysymykseksi nousee tällöin vastavuoroisesti se, miksi joka ikisessä ei-käänteissymmetristen komplementtiluokkien tapauksessa joukkoluokka toteuttaa osajoukkoluokkasuhteen käänteiskomplementtiluokkansa kanssa, vaikka osajoukkoluokkasuhde komplementtiluokan kanssa ei toteutuisikaan.

5. 4. KOMPLEMENTTI-INTERVALLIKON MÄÄRITTÄMINEN INTERVALLIKOSTA

Tietyn joukon intervallikosta voidaan muodostaa suoraan sen komplementin intervallikko. Chrisman esittää tämän toimenpiteen suorittamiseksi erään tavan[11] ja Regener toisen[12], joka perustuu täsmälleen samoihin havaintoihin intervallikon jäsenten käyttäytymisestä komplementoitaessa kuin oma metodini, jonka johdin Chrismanin tavasta. Näkökulmani on kuitenkin ymmärtääkseni astetta helpommin lähestyttävä kuin Regenerin, joten metodien samankaltaisuudesta huolimatta esittelen seuraavassa omani.

Chrisman soveltaa metodissaan intervallikoihin samanlaista *binäärinotaatiota* kuin Daniel Starr joukkoihin, ainoastaan päinvastaisessa järjestyksessä.[13] Kaikki intervallikot esitetään binäärinotaatiossa 12-jäsenisinä nollien ja/tai ykkösten kombinaatioina.

Intervallikon kukin jäsen kirjoitetaan vuoroin ykkösen ja nollien yhdistelmäksi siten, että alkuun tulee aina ykkönen ja sen perään intervallin numeroarvo-1 kappaletta nollia. Ykkönen pysyy ykkösenä, kakkosesta tulee 10, kolmosesta 100, nelosesta 1000, viitosesta 10000 jne. Esim. joukkoluokan 3-11 A intervallikko -345- on täten merkittynä 100100010000 ja joukkoluokan 5-3 A intervallikko -11217- 111011000000.

Binäärimuotoisesta intervallikosta muodostetaan sen binäärimuotoinen komplementti-intervallikko yksinkertaisesti vaihtamalla ykköset nolliksi ja päinvastoin. Intervallikosta 100100010000 tulee 011011101111 ja intervallikosta 111011000000 puolestaan 000100111111. Tämän jälkeen binäärimuotoinen komplementti-intervallikko palautetaan tavanomaiseksi intervallikoksi. Toimenpide aloitetaan vasemmanpuoleisimmasta ykkösestä. Nollasta ei voida aloittaa, koska sillä ei ole omaa arvoa. Kukin nolla kuuluu aina jonkin ykkösen perässä olevaan nollien ryhmään, kasvattaen tuon ykkösen määrittämän intervallin numeroarvoa.

Binäärimuotoisen intervallikon 011011101111 vasemmanpuoleisimmasta ykkösestä tulee intervalli 1, koska sillä ei ole nollaa perässään. Sitä seuraava 10 on intervalli 2. Seuraa kaksi pelkkää ykköstä ja 10:n muodostama kakkonen. Tämän jälkeen vielä kolme ykköstä sekä viimeisen ykkösen ja vasemmanpuoleisen nollan muodostama 10 eli kakkonen - äärijäsenet ovat rinnakkaisia. Tuloksena on intervallikko -121121112-, normaalijärjestyksessä -112111212-, joka kuuluu joukkoluokan 3-11 A komplementtiluokalle 9-11 B.

Toisen binäärimuotoisen intervallikon 000100111111 vasemmanpuoleisimpaan ykköseen liittyy kaksi nollaa. 100 on intervalli 3. Sitä seuraa viisi ykköstä ja oikeanpuoleisimman ykkösen ja kolmen vasemmanpuoleisen nollan muodostama 1000 eli intervalli 4. Intervallikko on -3111114- ja se kuuluu joukkoluokan 5-3 A komplementtiluokalle 7-3 B.

Kuten edellä huomattiin, on komplementinmuodostuksen peukalosääntönä yhtäältä että suuresta intervallista tulee ryhmä pieniä ja toisaalta että useat pienet yhtyvät muutamiksi suuriksi. Hieman tarkemmin intervalleittain yksilöitynä:

Tietyssä intervallikossa oleva kakkonen on binäärimuodossa 10. Vaihdettaessa nolla ykköseksi ja päinvastoin tästä kombinaatiosta tulee 01. Se voidaan palauttaa tavanomaiseksi intervalliksi samoin kuin edellä palautettiin kokonainen intervallikko. Aloitetaan jälleen vasemmanpuolimmaisesta - ja tässä tapauksessa ainoasta - ykkösestä. Se saa peräänsä kombinaation ainoan nollan, kuten edellä binäärimuotoisen intervallikon oikeanpuoleinen äärijäsen 1 sai peräänsä vasemmanpuoleisen äärijäsenen 0. Kombinaatio on 10, eli komplementoitaessa kakkonen pysyy itsenään.

Tietyssä intervallikossa oleva kolmonen on binäärimuodossa 100. Vaihdettaessa nollat ykkösiksi ja ykkönen nollaksi tästä kombinaatiosta tulee 011. Se palautetaan tavanomaisiksi intervalleiksi samalla tavalla kuin äskeinenkin tapaus. Vasemmanpuoleisen ykkösen perässä ei ole nollaa, joten ykkönen pysyy itsenään. Äärijäsenistä muodostuu 10 eli kakkonen. Täten kolmonen tuottaa komplementoituessaan intervalliparin 12.

Tietyssä intervallikossa oleva nelonen on binäärimuodossa 1000. Vaihdettaessa nollat ykkösiksi ja ykkönen nollaksi tästä kombinaatiosta tulee 0111. Palautettaessa se tavanomaisiksi intervalleiksi kaksi vasemmanpuoleista ykköstä pysyvät edelleen ykkösinä ja äärijäsenistä muodostuu 10 eli kaksi - nelonen tuottaa komplementoituessaan intervallikolmikon 112.

Tietyssä intervallikossa oleva viitonen on binäärimuodossa 10000. Vaihdettaessa nollat ykkösiksi ja ykkönen nollaksi tästä kombinaatiosta tulee 01111. Palautettaessa se tavanomaisiksi intervalleiksi kolme vasemmanpuoleista ykköstä ovat edelleen ykkösiä ja äärijäsenistä muodostuu 10 eli kaksi. Viitonen tuottaa komplementoituessaan intervallit 1112. Jne.

Yleensä siis jokainen ykköstä suurempi intervalli muodostaa komplementoituessaan intervallin numeroarvo-2 kappaletta ykkösiä ja niiden perään yhden kakkosen. (Intervalli 2 säilyy entisellään sen tuottaessa ykkösiä 2-2=0 kpl). Tätä havaintoa voidaan käyttää hyväksi ja kirjoittaa komplementti-intervallikko suoraan tunnetusta intervallikosta. Chrismanin metodin edellyttämä binäärinotaation välivaihe voidaan jättää pois.

Aiemmasta esimerkki-intervallikosta -345- muodostuu komplementti-intervallikko seuraavasti: vasemmalta aloitettaessa kolmosesta tulee 12, nelosesta 112 ja viitosesta 1112. Yhteensä -121121112- eli normaalijärjestyksessä -112111212-. Intervallikon vakio-osa on 212 ja käänteisosa 112111. Käänteisosa on B-tyyppinen, sillä päinvastainen muoto 111211 sisältää pienempiä intervalleja alkupäässä. Joukkoluokan 3-11 A komplementtiluokka on 9-11 B.

Esim 10: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 4-23 intervallikko on -2325-. Komplementti-intervallikkoa muodostettaessa kakkonen pysyy kakkosena, kolmosesta tulee 12, toinen kakkonen pysyy myös kakkosena ja viitosesta tulee 1112. Yhteensä -21221112- eli normaalijärjestyksessä -11122122-. Tämä on joukkoluokan 8-23 intervallikko.

Kun komplementoitavassa intervallikossa on ykkönen tai ykkösiä, ne kasvattavat *vasemmalla puolellaan* olevasta ykköstä suuremmasta intervallista komplementoitaessa aina syntyvää *kakkosta.*

Intervallikossa T oleva kolmonen tuottaa komplementti-intervallikkoon T' intervalliparin 12. Jos intervallikossa T onkin kolmosesta ja sen oikealla puolella olevasta ykkösestä muodostuva intervallipari 31, kasvattaa ykkönen kolmosesta komplementoituvan intervalliparin 12 kakkosta yhdellä yksiköllä, jolloin tuloksena on T':n intervallipari 1(2+1) = 13.

Jos intervallikossa T on kolmosesta ja kahdesta sen oikealla puolella olevasta ykkösestä muodostuva intervalliryhmä 311, kasvattaa *kumpikin* ykkönen kolmosesta komplementoituvan intervalliparin 12 kakkosta yhdellä yksiköllä, jolloin T':n muodostuu intervallipari 1(2+1+1) = 14.

Jos intervallikossa T on nelosesta ja neljästä sen oikealla puolella olevasta ykkösestä muodostuva intervalliryhmä 41111, kasvattaa kukin ykkönen nelosesta komplementoituvan intervalliryhmän 112 kakkosta yhdellä yksiköllä. T':n muodostuu intervalliryhmä 11(2+1+1+1+1) = 116.

Jos intervallikossa T on intervalliryhmä 211311, kasvattavat kakkosen oikealla puolella olevat kaksi ykköstä kakkosesta komplementoituvaa kakkosta yhdellä yksiköllä kumpikin. 2+1+1 = 4. Kolmosen oikealla puolella olevat kaksi ykköstä puolestaan kasvattavat kolmosesta komplementoituvan intervalliparin 12 kakkosta yhdellä yksiköllä kumpikin. 1(2+1+1) = 14. T:n intervalliryhmä 211311 tuottaa siten komplementti-intervallikkoon T' intervalliryhmän 414. Jne.

Jos intervallikon alussa on ykkösiä, komplementointi aloitetaan vasemmalta katsoen ensimmäisestä ykköstä suuremmasta intervallista.

Esimerkki 11: 1-akselisesti symmetrisen joukkoluokan 9-1 intervallikko on -111111114-. Komplementointi aloitetaan intervallista 4. Se tuottaa komplementoituessaan intervalliparin 112, jonka kakkosen kanssa lasketaan yhteen kaikki 8 ykköstä ja saadaan -1,1,10-. Tämä on joukkoluokan 3-1 intervallikko.

Esimerkki 12: joukkoluokan 7-2 A intervallikko on -1111125-. Komplementointi aloitetaan kakkosesta, joka pysyy kakkosena. Intervalli 5 tuottaa intervalliryhmän 1112, jonka kakkosen kanssa lasketaan yhteen kaikki viisi ykköstä. Tällöin saadaan ryhmä 1117 ja ensimmäinen kakkonen mukaanlukien koko intervallikko 21117. Tämä on B-tyyppinen intervallikko, sillä käänteisosan päinvastaisessa muodossa 1112 on pienempi intervalli alussa. 7-2 A:n komplementtiluokka on siis 5-2 B ja sen intervallikko -21117-.

Esimerkki 13: joukkoluokan 6-Z19 A intervallikko on -121314-. Komplementointi aloitetaan kakkosesta, joka pysyisi muuten kakkosena, mutta sen oikealla puolella oleva ykkönen kasvattaa siitä intervallin 3. Kolmonen tuottaa intervalliparin 12, kolmosen oikealla puolella olevan ykkösen kasvattaessa intervalliparin kakkosta yhdellä yksiköllä: 13. Nelosesta tulisi 112, mutta intervallikon alussa oleva neloseen liittyvä ykkönen kasvattaa 112:n kakkosta yhdellä yksiköllä: 113. Komplementti-intervallikko on -313113-, normaalijärjestyksessä -131133-, joka on B-tyyppinen. (Käänteisosan päinvastaisessa muodossa 1131 on pienempiä intervalleja alkupäässä). Joukkoluokan 6-Z19 A komplementtiluokka on 6-Z44 B.

VIITTEITÄ JA HUOMAUTUKSIA LUKUUN 1: KÄSITTEISTöÄ

1 Roiha 1949, s. 22.
2 Hanson 1960, s. 3 -.
3 Morris 1979/1980, s. 458.
4 Hämeenniemi 1982, s. 22.
5 Starr 1978, s. 2.
6 Perusteellisempi esitys mod 12-aritmetiikasta löytyy esim. artikkelista Starr 1978.
7 Rahn 1980, s. 21
8 Ibid., s. 22.
9 Ibid., s. 25-26. Lewin 1959, sivut 298-299.
10 Rahn 1980, s. 28.
11 Forte 1973a, s. 14. Morris 1979/1980, s. 458.
12 Esim. Rahn 1980, s. 28 ja Hämeenniemi 1982, s. 31.
13 Rahn 1980, s. 27.
14 Forte 1973a, s. 3.
15 Ibid. sivut 21-24.
16 Myrberg 1978, sivut 9-14. Miettinen 1986, sivut 64-68. Grossman 1984, sivut 3-4.
17 Ks. esim. Chrisman 1979a, s. 25.
18 Rahn 1980, sivut 40-43. Forte 1973a, sivut 5-7 sekä 10. Hämeenniemi 1982, sivut 45-48.
19 Tässä esityksessä käsitellään vain I-avaruudellisia inversioita. R-avaruudellisten käännösoperaatioiden tarkastelua löytyy esim. Rahn 1980, sivut 45-47 sekä Hämeenniemi 1982, sivut 51-53.
20 Lewin 1972, sivut 192-193. Lewin 1977a, sivut 34-38. Gingerich 1985, sivut 59-61. Cherlin 1986, sivut 50-59.
21 Morris 1979/1980, s. 459.
22 Babbitt 1962, s. 114.
23 Ks. esim. Rahn 1980, s. 47.
24 Ks. Lewin 1977a.
25 Babbitt 1972a, sivut 179-180. Mead 1984a, alaviite s. 55. Rahn 1980, sivut 50 sekä 88-89.
26 Hanson 1960, sivut 356-371. Perle 1981, sivut 155-161. Regener 1974, sivut 195-198. Hämeenniemi 1983, sivut 30-43. Chrisman 1971, sivut 58-83. Chrisman 1979a, sivut 7-26. Chrisman 1979b, sivut 85-121.
27 Hämeenniemi 1983, sivut 35-42.
28 Forte 1973a, sivut 3-5. Rahn 1980, sivut 31-39. Regener 1974, sivut 196-197. Janecek 1965,. Janecekin metodi kuvailtu artikkelin Regener 1974 *Addendumissa* s. 212. Hämeenniemi 1983, s. 31. Tunnetuimmat lienevät kaksi ensiksimainittua. Niiden välisiä eroavaisuuksia käsitellään artikkelissa Smyth 1983/1984, sivut 550-551.
29 Rahn 1980, s. 75.
30 Morris 1982a.

31 Chrisman 1979b, sivu 87. Solomon 1982, sivut 62-72.
32 Rahn 1980, s. 76.
33 Forte 1973a, s. 5. Rahnin joukkoluokitus löytyy taulukkona Rahn 1980, sivuilla 140-143, Forten taas Forte 1973a, sivuilla 179-181. Niiden välisiä eroavaisuuksia luonnehditaan artikkelissa Smyth 1983/1984, sivuilla 552 ja 555.
34 Starr 1978, sivut 5-38. Rahn 1980, sivut 53-55 ja 103-105.
35 Forte 1964.
36 Forte 1973a, s. 5.
37 Forte 1985, sivut 38-40.
38 Chrisman 1979a, sivut 8-25.
39 Forte 1973a, sivut 11-13 ja 179-181.
40 Solomon 1982, sivut 65-70. Lewin 1977b, sivut 197-198. Morris 1982/1983, sivut 484-486.
41 Ks. käsitteet "most normal form", Rahn 1980, sivut 75-76, ja "best normal order", Forte 1973a, sivut 4 ja 12-13.
42 Ks. Miettinen 1986, s. 65, ja käsite "*referential set* ", Rahn 1980, s. 89.
43 Chrisman ja Solomon ovat päätyneet omissa samantyyppisissä luokituksissaan hieman poikkeaviin merkintätapoihin. Chrisman 1979b ja Solomon 1982.
44 Starr 1978, sivu 16.
45 Rahn 1980, sivu 93, esimerkki 2. Joukon normaalijärjestys on {0,1,4,6,7,9}, kanoninen järjestys {0,4,6,7,9,1} ja tämän järjestyksen intervalliketju 4-2-1-2-4. (Rahn ei useimmiten ota äärijäsenten välistä intervallia mukaan). Ketjun jäsenten summa on 13.
46 R-avaruudellisten säveltasokombinaatioiden tarkastelemisesta tai luokittelemisesta joukkoteorian keinoin ks. Forte 1973b, Chapman 1981, Mead 1984b, sivut 25-28. Forte 1973a, sivut 63-73.
47 Ks. esim. Lewin 1977b, s. 220. Rahn 1979/1980, sivut 484-487. Morris 1983/1984, sivut 192-193. Hoover 1984, s. 173.
48 Rahn 1980, s. 91, 111-114
49 Ibid., s. 38

VIITTEITÄ JA HUOMAUTUKSIA LUKUUN 2: INTERVALLIAVARUUDELLISET SYMMETRIAT

1 Johnson 1978, sivut 220-221.
2 Rahn 1980, s. 90-93. Hämeenniemi 1983, s. 35.
3 Johnson 1978, sivut 223-224. Solomon 1973, sivu 258. Gingerich 1985, sivut 60-63. Maegaard 1985, sivut 305-307. Cherlin 1986, sivut 51-59. Tätä kysymyksenasettelua muistuttavia asetelmia sisältää myös Hanson 1960. Ks. sivut 12, 14, 19, 92, 118, 132 ja 249-253.
4 Hämeenniemi 1982, s. 54. Rahn 1980, s. 50.
5 Ks. *Käsitteistöä* -luku, kohta 5: *I-avaruudelliset akselit R-avaruudessa.*
6 Hämeenniemi 1981, s. 21.
7 Forte 1973a, sivu 49.
8 *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.11.3.: käänteisintervallikot.
9 Chrisman 1979a, s. 15.
10 Rahn 1980, s. 91.
11 Hämeenniemi 1983, s. 33.
12 Ks. luku *Komplementtijoukot ja -joukkoluokat.*
13 Chrisman 1979a, s. 14. Rahn 1980, s. 92. Hämeenniemi 1983, s. 35.
14 Forte 1973a, s. 37. Headlam 1983, sivut 37-44.
15 Kiintoisana sivuhuomautuksena mainittakoon, että fyysikko-matemaatikko Hermann Weyl kiinnittää kirjassaan Weyl 1952 huomiota tunnettuun symmetriseen kuvioon, joka joukkoluokkien 6-30 A ja 6-30 B tavoin on kiertosymmetria muttei käänteissymmetria. Kyseessä on hakaristi, jota on monissa kulttuureissa käytetty taikamerkkinä tms. symbolina. Weyl arvelee kuvion mieltäkiinnittävyyden johtuvan juuri sen erikoislaatuisesta symmetriaominaisuudesta. Joukkoluokkiin 6-30 A ja 6-30 B liittyy myös toinen, huomattavasti vähemmän ulkomusiikillinen erikoisuus, jota jo sivuttiin *Käsitteistöä* -luvun normaalijärjestystä käsittelevässä kohdassa 2.12. Niiden intervallikoissa suurimmat intervallit eivät rajaa osasymmetrioita.
16 Kaikkien jäsenjoukkojen joukon ja kaikkien transpositioiden joukon erikokoisuutta kiertosymmetrisissä tapauksissa sivuttiin jo *Käsitteistöä* -luvun kohdassa 3.4.

VIITTEITÄ JA HUOMAUTUKSIA LUKUUN 3: OSAJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

1 Chrisman 1979a, sivut 21-24 ja Chrisman 1971, sivut 73-77.
2 Chrisman 1971, sivu 74, kohta 5.1.
3 Clough 1983, s. 182.
4 Näitä kysymyksiä tarkastellaan enemmän kohdassa 3.: *Kiertosymmetristen joukkoluokkien osajoukkoluokkasuhteet.*
5 Forte 1973a, s. 27.
6 Jan Maegaard on esittänyt toisentyyppisen ratkaisun tälle toimenpiteelle artikkelissaan Maegaard 1985. Sivut 307-314.
7 Forte 1973a, s. 27.
8 Joukon kaikkien osajoukkojen määrän laskeminen, ks. Forte 1973a, sivu 26.
9 Forte 1973a, s. 96.

VIITTEITÄ JA HUOMAUTUKSIA LUKUUN 4: LEIKKAUSVEKTORIT

1 *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.8.
2 *Käsitteistöä* -luku, kohta 3.4
3 *Käsitteistöä* -luku, kohta 3.4. ja tämän luvun kohta 9.
4 Näitä indeksejä ei tule sekoittaa *Käsitteistöä* -luvun kohdassa 2.10.2. viitattuihin indekseihin, jotka liittyivät kääntämiseen.
5 Rahn 1980, sivut 113-114.
6 Regener 1974, s. 203.
7 Lewin 1959, sivut 298-301. Lewin 1977b, sivut 194-237.
8 Rahn 1980, sivut 98-102. Forte 1973a, sivut 15-21.
9 Rahn 1980, sivut 111-114.
10 Ibid., sivut 97-114.
11 Alphonce 1973. Gamer & Lansky 1976, sivut 229-235. Hämeenniemi 1981, sivut 95-102. Morris 1982b.
12 *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.10.2.
13 Gamer & Lansky 1976, sivu 231.
14 Rahn 1979/1980, sivu 487.
15 Intervallivektoria olisi oikeastaan perusteltua nimittää *intervalliluokkavektoriksi* ,interval-class-vector, mutta joukkoteoreettissa kirjallisuudessa käytetään termiä intervallivektori lähes säännönmukaisesti. Poikkeuksista ks. esim. Morris 1982/1983, sivut 483-484.
16 *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.6.
17 *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.7.
18 Babbitt 1972b, sivu 15. Forte 1973a, sivut 13-21. Rahn 1980, sivut 100-102. Hanson 1960, s. 13. Goder 1972, sivut 144-147. Hämeenniemi 1982, sivut 89-90. Hämeenniemi 1981, sivut 48-49.
19 Rahn 1980, s. 114: "The TICS-vectors of sets a tritone apart are identical".
20 Ks. esim. Babbitt 1972b, sivut 15-17.
21 Rahn 1980, sivut 98-102. Forte 1973a, s. 15. Hämeenniemi 1982, sivut 89-90. Hämeenniemi 1981, sivut 48-49.
22 Rahn 1980, sivut 111-115.
23 Ibid., s. 93.
24 Chrisman 1979a, sivut 24-26.
25 Rahn 1980, s. 114.

VIITTEITÄ JA HUOMAUTUKSIA LUKUUN 5: KOMPLEMENTTIJOUKOT JA -JOUKKOLUOKAT

1 ks. *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.8.
2 Forte 1973a, sivut 73-74. Chrisman 1971, s. 77. Hämeenniemi 1982, s. 39. Hämeenniemi 1981, s. 12.
3 Regener 1974, s. 197.
4 Solomon on myös tahollaan esittänyt samat havinnot artikkelissaan Solomon 1982, sivuilla 64-70. Hänen taulukossaan on kaksi virhettä. Joukkoluokkien 5-11/7-11 tapaukset puuttuvat ja mukaan otetut joukkoluokkien 5-18/7-18 komplementoinnit menevät todellisuudessa ristiin. 5-18 A:n komplementti kuuluu 7-18 B:hen jne.
5 Forte 1973a, sivut 77-78. Rahn 1980, s. 106. Hämeenniemi 1982, s. 107.
6 Lewin 1960, sivu 99.
7 Lewin 1960, s. 99. Babbitt 1972c, s. 136. Regener 1974, s. 202.
8 Samat tiedot osoittaa myös Morrisin *invariance vector*, vakiovektori, tarkemmin sanottuna sen 5. ja 6. komponentti vasemmalta lukien. 5. viittaa osajoukkoluokkasuhteiden toteutumisten määrään joukkoluokan ja sen komplementtiluokan, 6. joukkoluokan ja sen käänteiskomplementtiluokan välillä. Morris 1982/1983, sivut 484-486.
9 Osajoukkoluokkasuhdeasetelmien käänteisyydestä ks. *Osajoukot ja -joukkoluokat* -luvun kohdat 1.1. ja 3.
10 Hanson 1960, sivut 331-334.
11 Chrisman 1971, sivut 77-78.
12 Regener 1974, sivut 197-198.
13 Starr 1978, sivut 15-38. *Käsitteistöä* -luku, kohta 2.18.

KIRJALLISUUSLUETTELO

Julkaisujen nimistä käytetyt lyhenteet:

Interface	*Interface. Journal of New Music Research.* Swets & Zeitlinger B.V.-Lisse.
ITO	*In Theory Only. Journal of The Michigan Music Theory Society.* Ann Arbor, Michigan.
JMT	*Journal of Music Theory.* Yale University. New Haven, Connecticut.
MA	*Music Analysis.* Basil Blackwell Publisher Ltd. Oxford.
PNM	*Perspectives of New Music.* Perspectives of New Music Inc., Seattle. Lyhennys F-W tarkoittaa Fall-Winter, lyhennys S-S Spring-Summer. Merkintä F-W/S-S tai S-S/F-W viittaa kaksoisnumeroon

Alphonce, Bo

1973 *The Invariance Matrix.* Väitöskirja, Yale University.

Babbitt, Milton

1962 *Twelwe-Tone Invariants as Compositional Determinants.* Julkaistu artikkelikokoelmassa Problems of Modern Music, toim.Lang. Sivut 108-121. Norton.

1972a *Contemporary Music Composition and Music Theory as Contemporary Intellectual History.* Julkaistu artikkelikokoelmassa Perspectives in Musicology, toim. Brook, Downes & van Solkema. Sivut 151-173. Norton.

1972b *The Structure and Function of Musical Theory.* Julkaistu artikkelikokoelmassa Perspectives on Contemporary Music Theory, toim. Boretz & Cone. Sivut 10-21.Norton.

1972c *Set Structure as a Compositional Determinant.* Julkaistu artikkelikokoelmassa Perspectives on Contemporary Music Theory. Toim. Boretz & Cone. Sivut 129-147. Norton.

Chapman, Alan
1981 *Some Intervallic Aspects of Pitch-Class Set Relations.* JMT 25/2. Sivut 275-290.

Cherlin, Michael
1986 *Alphonce's Invariance Matrix and Lewin's Inversional Clock: A New Approach Toward Reading Pitch-Class Matrices.* ITO 9/2-3. Sivut 47-59.

Chrisman, Richard
1971 *Identification and Correlation of Pitch-Sets.* JMT 15. Sivut 58-83.

1979a *Describing Structural Aspects of Pitch-Sets Using Successive-Interval Arrays.* JMT 21/1. Sivut 1-28.

1979b *Anton Webern's "Six Bagatelles for String Quartet" op.9: The Unfolding of Intervallic Successions.* JMT 23/1. Sivut 81-122.

Clough, John
1983 *Use of the Exclusion Relation to Profile Pitch-Class Sets.* JMT 27/1. Sivut 181-202.

Forte, Allen
1964 *A Theory of Set-Complexes for Music.* JMT 8/2. Sivut 136-183.

1973a *The Structure of Atonal Music.* Yale University Press. New Haven and London.

1973b *Basic Interval Patterns.* JMT 17/2. Sivut 234-273.

1985 *Pitch-class Set Analysis Today.* MA 4/1-2. Sivut 29-58.

Gamer, Carlton & Lansky, Paul
1976 *Fanfares for the Common Tone.* PNM S-S/F-W. Sivut 229-235.

Gingerich, Lora L.
1985 *Another method of Teaching Hexachordal Combinatoriality.* ITO 8/4-5. Sivut 57-63.

Goder, Miriam
1972 *The Interval-Triangle.* JMT 16 1/2. Sivut 142-167.

Grossman, Stanley I.
1984 *Calculus.* Academic Press. 3.p.

Hanson, Howard
1960 *Harmonic Materials of Modern Music. Resources of the Tempered Scale.* Appleton-Century-Crofts Inc. New York.

Headlam, Dave
1983 *Recognizing Pitch-Class Collections of Limited Transposition.* ITO 7/4. Sivut 37-44.

Hoover, Mark
1984 *Set Constellations.* PNM F-W. Sivut 164-179.

Hämeenniemi, Eero
1981 *Säveltasosta. Kokeilumoniste/luonnos uuden musiikinteorian perusesityksen säveltasoa käsitteleväksi osaksi.* Sibelius-Akatemia.

1982 *ABO - Johdatus uuden musiikin teoriaan.* Sibelius-Akatemian koulutusjulkaisusarja 1. Helsinki.

1983 *Joukkoluokkien intervallikot.* Sibelius-Akatemian vuosikirja SIC. Sivut 30-43.

Janecek, Karel
1965 *Zaklady Moderni Harmonie.* Praha.

Johnson, Peter
1978 *Symmetrical Sets in Webern's op. 10, no. 4.* PNM F-W. Sivut 219-229.

Lewin, David
1959 *Intervallic Relations Between Two Collections of Notes.* JMT 3/2. Sivut 298-301.

1960 *The Intervallic Content of a Collection of Notes, Intervallic Relations Between a Collection of Notes and its Complement: An Application to Schoenberg's Hexachordal Pieces.* JMT 4/1. Sivut 98-101.

1972 *A Theory of Segmental Association in Twelwe-Tone Music.* Julkaistu artikkelikokoelmassa Perspectives on Contemporary Music Theory, toim. Boretz & Cone. Norton. Sivut 180-207.

1977a *A Label-Free Development for 12-Pitch-Class Systems.* JMT 21/1. Sivut 29-48.

1977b *Forte's Interval Vector, My Interval Function and Regener's Common-Note Function*. JMT 21/2. Sivut 194-237.

Maegaard, Jan
1985 *The Nomenclature of Pitch-Class Sets and the Teaching of Atonal Theory*. JMT 29/2. Sivut 299-314.

Mead, Andrew W.
1984a *A Practical Method for Dealing with Unordered Pitch-Class Collections*. ITO 7/5-6. Sivut 54-66.

1984b *Manifestations of Pitch-Class Order*. ITO 8/1. Sivut 23-32.

Miettinen, Seppo K.
1986 *Logiikan peruskurssi*. Gaudeamus.

Morris, Robert
1979/1980 *A Similarity Index for Pitch-Class Sets*. PNM F-W/S-S. Sivut 445-460.

1982a *Set groups, Complementation, and Mappings among Pitch-class Sets*. JMT 26/1. Sivut 101-144.

1982b *Review of Basic Atonal Theory by John Rahn*. Spectrum of Music Theory 4.

1982/1983 *Combinatoriality Without the Aggregate*. PNM F-W/S-S. Sivut 432-486.

1983/1984 *Set-Type Saturation Among Twelwe-Tone Rows*. PNM F-W/SS. Sivut 187-217.

Myrberg, Lauri
1978 *Algebra*. Kirjayhtymä.

Perle, George
1981 *Serial Composition and Atonality*. University of California Press. 5.p.

Rahn, John
1979/1980 *Relating Sets*. PNM F-W/S-S. Sivut 483-497.

1980 *Basic Atonal Theory*. Longman, New York.

Regener, Eric
1974 *On Allen Forte's Theory of Chords.* PNM F-W. Sivut 191-212.

Roiha, Eino
1949 *Johdatus musiikkipsykologiaan.* Gummerus.

Smyth, David H.
1983/1984 *Basic Atonal Theory by John Rahn.* PNM F-W/S-S. Sivut 549-556.

Solomon, Larry
1973 *New Symmetrical Transformations.* PNM S-S. Sivut 257-264.

1982 *The List of Chords, Their Properties and Use in Analysis.* Interface 11/2. Sivut 61-107.

Starr, Daniel
1978 *Sets,Invariance and Partitions.* JMT 22/1. Sivut 1-42.

Weyl, Hermann
1952 *Symmetry.* Princeton University Press.

JOUKKOLUOKKATAULUKKO

Sävelluokkaympyröillä olevat joukot ovat joukkoluokkien primaarimuotoja. Kunkin ympyrän kehällä olevat rengastetut numerot muodostavat yhdessä primaarimuodon sävelluokkasisällön. Paksummalla kirjasimella merkitty sävelluokka 0 on joukon normaalijäsen.

Ympyrän sisällä olevat reunustetut numerot muodostavat yhdessä intervallikon. Normaalijärjestys saadaan lukemalla numerot myötäpäivään, aloittaen jäsenestä joka on sävelluokan 0 ja siitä myötäpäivään mentäessä ensimmäisen vastaantulevan sävelluokan välissä.

Jos joukkoluokka on käänteissymmetrinen, on sävelluokkaympyröille merkitty akselit, joiden suhteen käännettäessä primaarimuodon sävelluokkasisällöt säilyvät muuttumattomina.

Ympyröiden alla olevat väliviivalla varustetut numerot ovat joukkoluokkien nimiä. Väliviivan vasemmalla puolella oleva numero kertoo joukkoluokan jäsenjoukkojen koon, oikealla puolella oleva numero joukkoluokan järjestysnumeron. Jos joukkoluokan nimessä on lisäksi kirjain A tai B, on kyseessä epäsymmetrinen tai pelkästään kiertosymmetrinen joukkoluokka. Jos nimessä ei ole kirjainta A tai B, on joukkoluokka käänteissymmetrinen. Kunkin käänteissymmetrisen joukkoluokan nimi on lisäksi varustettu kehyksillä.

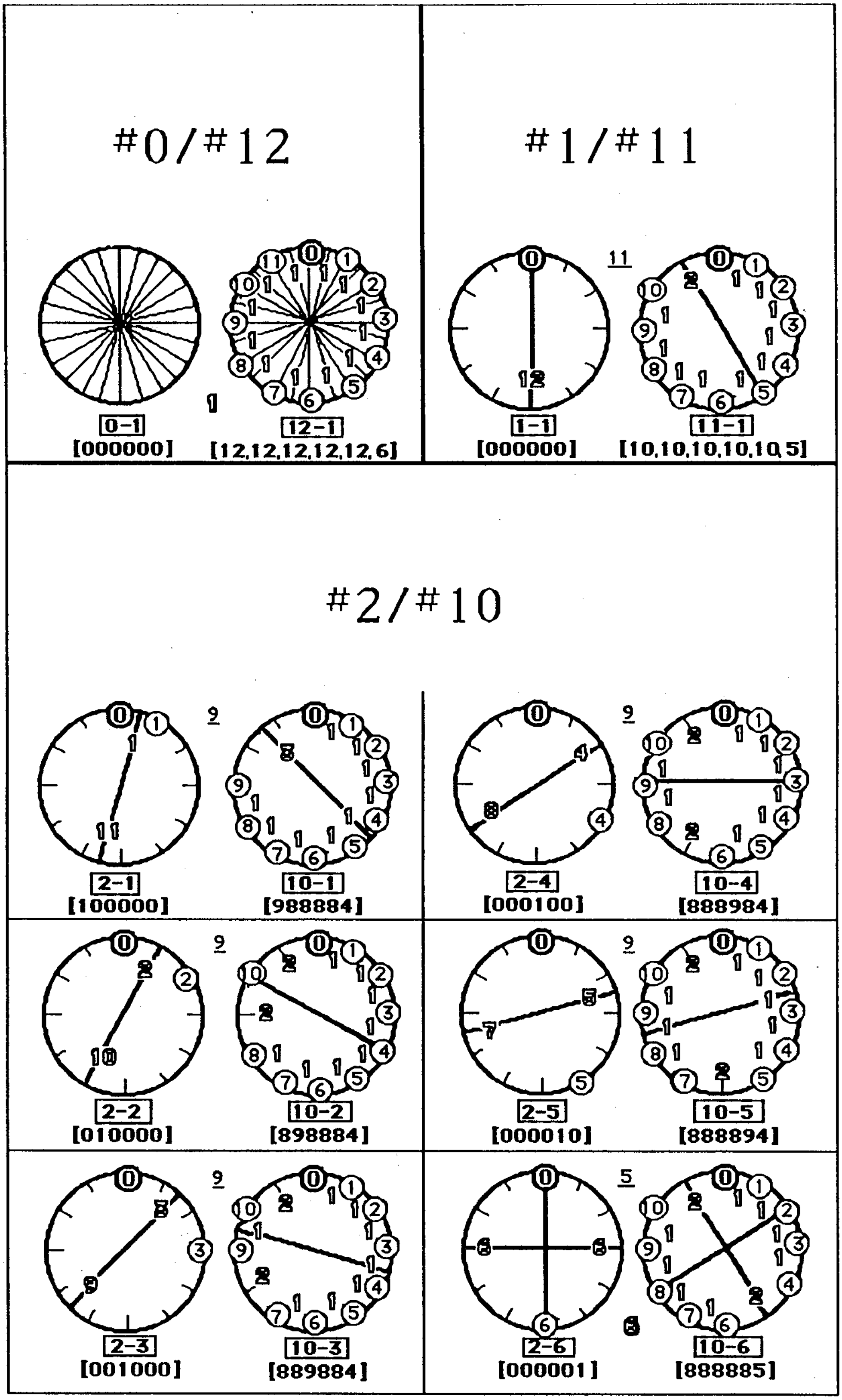
Nimen alla on suluissa joukkoluokan intervallivektori. A- ja B-tyyppisillä käänteisjoukkoluokilla on aina identtinen intervallivektori. Eräissä tapauksissa joukkoluokilla on identtinen intervallivektori, vaikka ne eivät olekaan toistensa käänteisjoukkoluokkia. Nämä tapaukset on merkitty siten, että joukkoluokan nimessä on Z-kirjain ja intervallivektorin molemmissa päissä musta neliö.

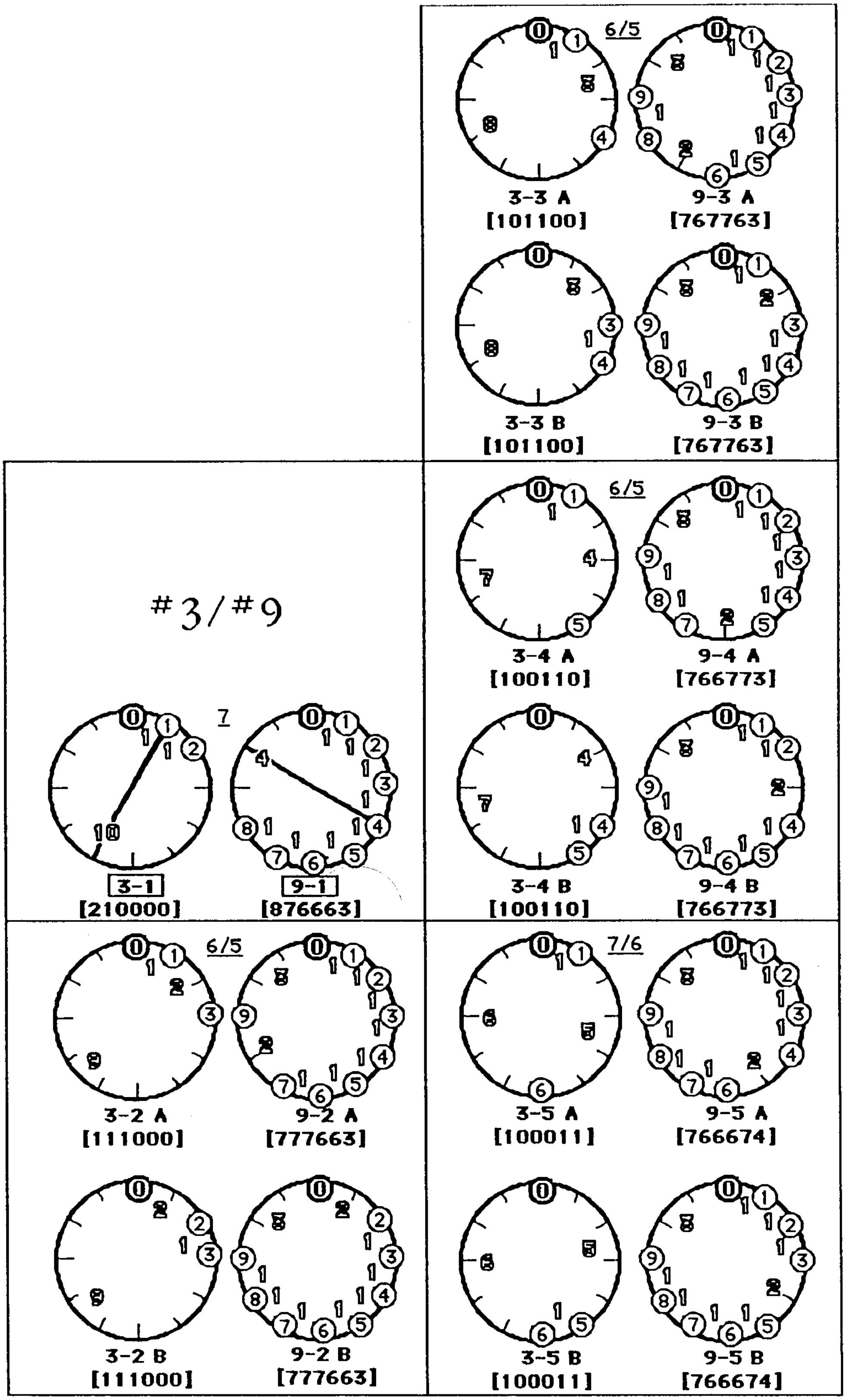
Primaarimuodot on ryhmitelty siten, että yhdessä viivojen rajaamassa kehikossa on tietty primaarimuoto, mahdollisen käänteisjoukkoluokan primaarimuoto, komplementtiluokan primaarimuoto sekä mahdollisen käänteisjoukkoluokan komplementtiluokan primaarimuoto. Jos 6-jäsenisten joukkoluokkien tapauksissa tietyssä kehikossa olevan ympyrän oikealla puolella oleva tila on tyhjä, on joukkoluokka oma komplementtiluokkansa tai käänteisjoukkoluokkansa komplementtiluokka. Z-suhteisissa tapauksissa kaikki saman intervallivektorin omaavien joukkoluokkien primaarimuodot sekä niiden komplementtiluokkien primaarimuodot (joilla on niinikään keskenään identtiset intervallivektorit) on sijoitettu yhteen kehikkoon. Muutoin noudatettava joukkoluokkien kasvava numerojärjestys tekee siis Z-suhteisten joukkoluokkien kohdalla poikkeuksen.

Pääsääntöisesti A-tyyppisen joukkoluokan komplementtiluokka on B-tyyppinen ja päinvastoin. Poikkeustapaukset, joissa A:n komplementtiluokka on A-tyyppinen ja B:n B-tyyppinen, on merkitty A:sta A:han ja B:stä B:hen osoittavilla nuolilla.

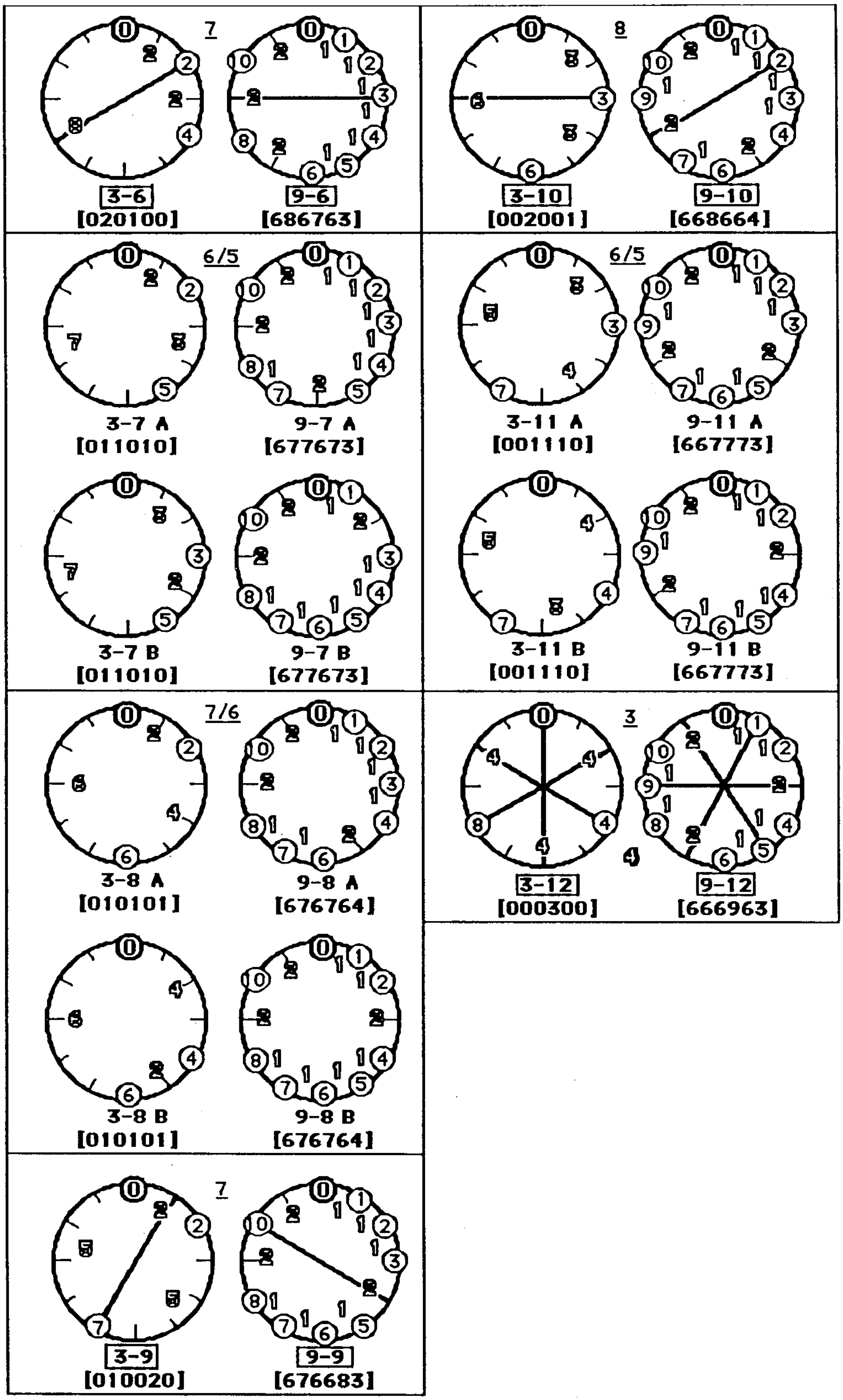
Ympyröiden väliin (yläpuolelle) alleviivatulla kirjasimella kirjoitettu numero osoittaa, kuinka monta kertaa osajoukkoluokkasuhde toteutuu suuremman ja pienemmän joukkoluokan välillä. A/B-tyyppisten joukkoluokkien tapauksissa numeroita on kaksi. Tällöin kauttaviivan vasemmalla puolella oleva numero osoittaa osajoukkoluokkasuhteiden toteutumisten määrän pienemmän A:n ja suuremman A:n sekä pienemmän B:n ja suuremman B:n välillä. Vastaavasti kauttaviivan oikealla puolella oleva numero osoittaa osajoukkoluokkasuhteiden toteutumisten määrän pienemmän B:n ja suuremman A:n sekä pienemmän A:n ja suuremman B:n välillä.

Mikäli tietyn joukkoluokan jäsenjoukkojen lukumäärä poikkeaa kahdestatoista (koskee moniakselisesti käänteissymmetrisiä joukkoluokkia sekä pelkästään kiertosymmetrisiä joukkoluokkia 6-30 A ja 6-30 B), on jäsenjoukkojen määrä merkitty varjostetulla kirjasimella sävelluokkaympyröiden väliin (alapuolelle). Kaikissa muissa tapauksissa on jäsenjoukkoja 12.


#0/#12
0-1
[000000]
12-1
[12,12,12,12,12,6]
#1/#11
1-1
[000000]
11-1
[10,10,10,10,10,5]
#2/#10
2-1
[100000]
10-1
[988884]
2-4
[000100]
10-4
[888984]
2-2
[010000]
10-2
[898884]
2-5
[000010]
10-5
[888894]
2-3
[001000]
10-3
[889884]
2-6
[000001]
10-6
[888885]

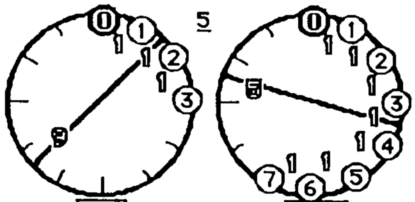


#3/#9
6/5
3-3 A
[101100]
9-3 A
[767763]
3-3 B
[101100]
9-3 B
[767763]
6/5
3-4 A
[100110]
9-4 A
[766773]
3-4 B
[100110]
9-4 B
[766773]
7
3-1
[210000]
9-1
[876663]
6/5
3-2 A
[111000]
9-2 A
[777663]
3-2 B
[111000]
9-2 B
[777663]
7/6
3-5 A
[100011]
9-5 A
[766674]
3-5 B
[100011]
9-5 B
[766674]


7
3-6
[020100]
9-6
[686763]
8
3-10
[002001]
9-10
[668664]
6/5
3-7 A
[011010]
9-7 A
[677673]
3-7 B
[011010]
9-7 B
[677673]
6/5
3-11 A
[001110]
9-11 A
[667773]
3-11 B
[001110]
9-11 B
[667773]
7/6
3-8 A
[010101]
9-8 A
[676764]
3-8 B
[010101]
9-8 B
[676764]
3
3-12
[000300]
9-12
[666963]
7
3-9
[010020]
9-9
[676683]

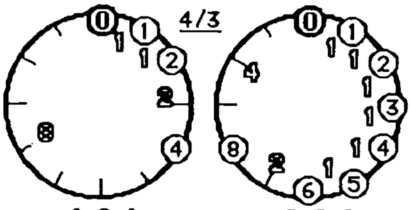
#4/#8

5

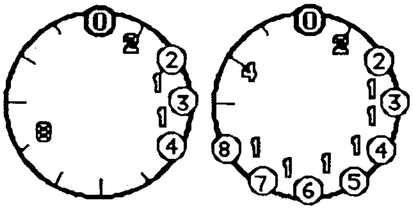


4-1 [321000] — 8-1 [765442]

4/3

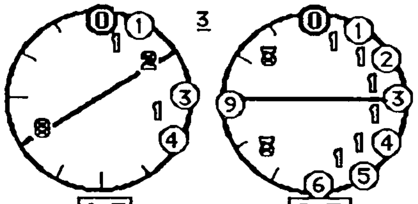


4-2 A [221100] — 8-2 A [665542]



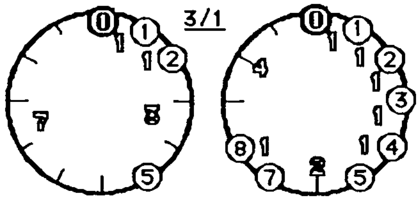
4-2 B [221100] — 8-2 B [665542]

3

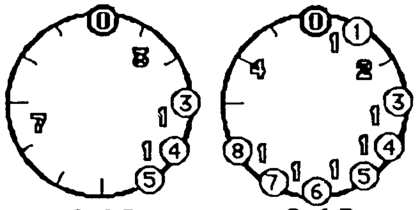


4-3 [212100] — 8-3 [656542]

3/1

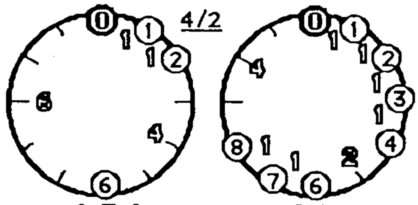


4-4 A [211110] — 8-4 A [655552]

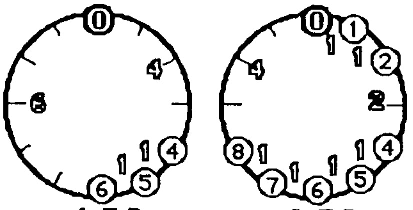


4-4 B [211110] — 8-4 B [655552]

4/2

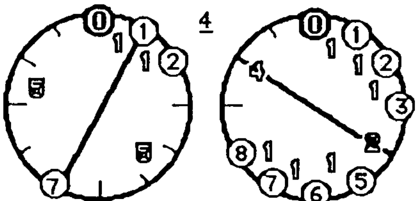


4-5 A [210111] — 8-5 A [654553]

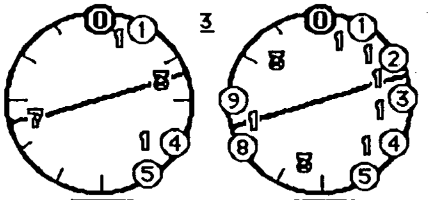


4-5 B [210111] — 8-5 B [654553]

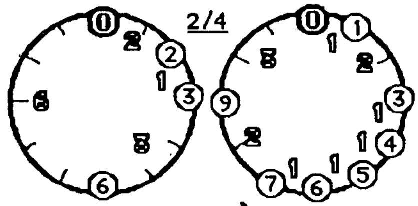
4



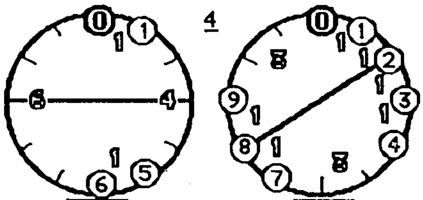
4-6 [210021] — 8-6 [654463]



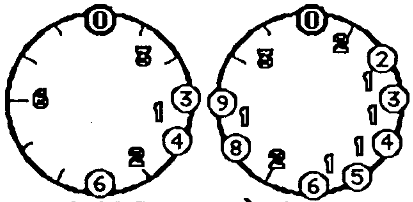
4-7 [201210] 8-7 [645652]



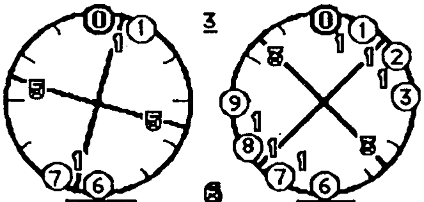
4-12 A → 8-12 A
[112101] [556543]



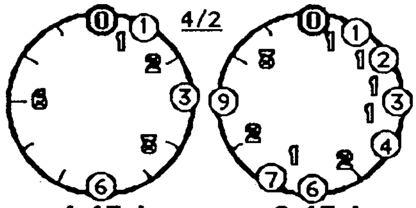
4-8 [200121] 8-8 [644563]



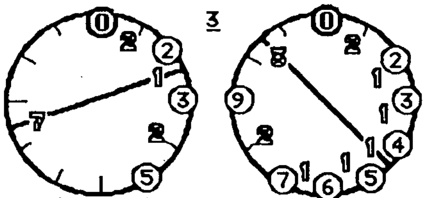
4-12 B → 8-12 B
[112101] [556543]



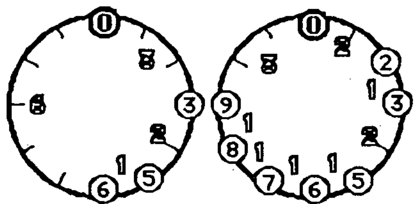
4-9 [200022] 8-9 [644464]



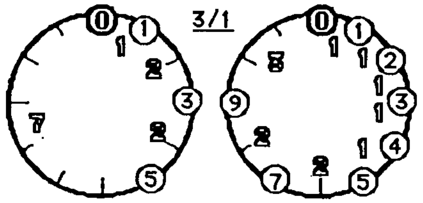
4-13 A 8-13 A
[112011] [556453]



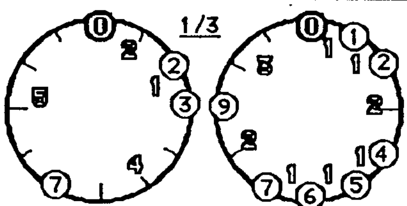
4-10 [122010] 8-10 [566452]



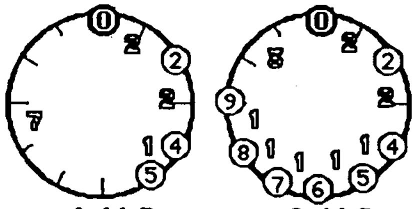
4-13 B 8-13 B
[112011] [556453]



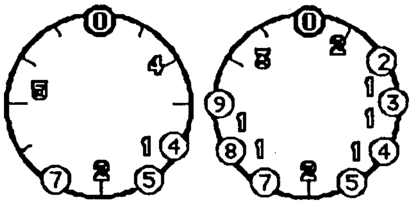
4-11 A 8-11 A
[121110] [565552]



4-14 A → 8-14 A
[111120] [555562]

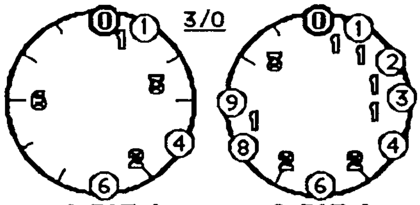


4-11 B 8-11 B
[121110] [565552]

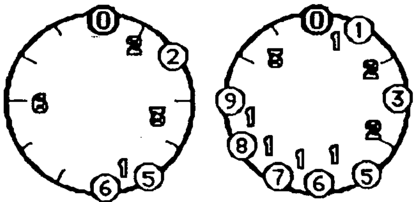


4-14 B → 8-14 B
[111120] [555562]

3/0

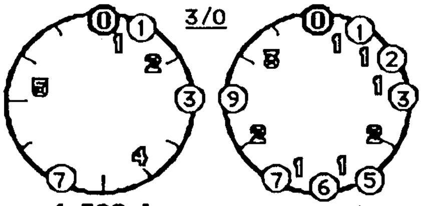


4-Z15 A ■ [111111] ■ 8-Z15 A ■ [555553] ■

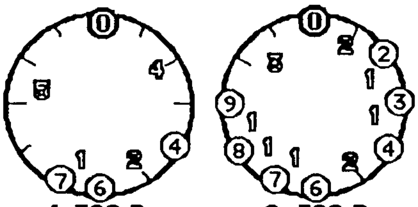


4-Z15 B ■ [111111] ■ 8-Z15 B ■ [555553] ■

3/0

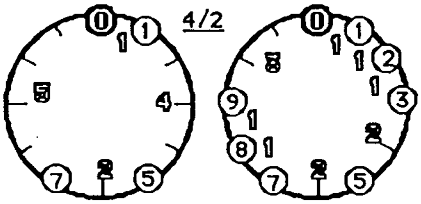


4-Z29 A ■ [111111] ■ 8-Z29 A ■ [555553] ■

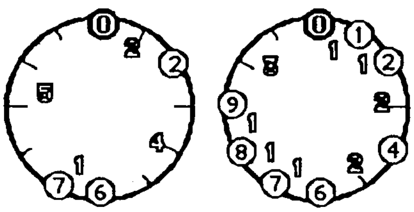


4-Z29 B ■ [111111] ■ 8-Z29 B ■ [555553] ■

4/2

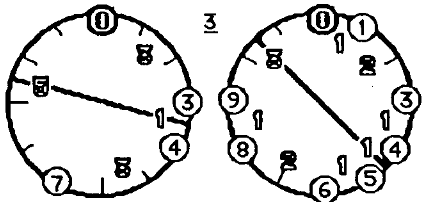


4-16 A [110121] 8-16 A [554563]



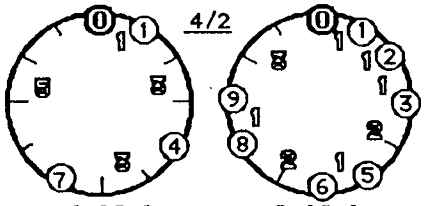
4-16 B [110121] 8-16 B [554563]

3

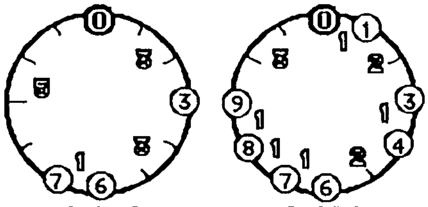


4-17 [102210] 8-17 [546652]

4/2

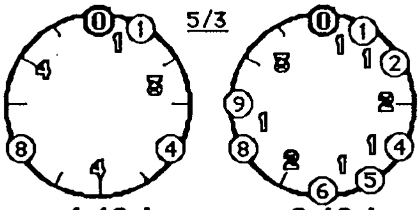


4-18 A [102111] 8-18 A [546553]

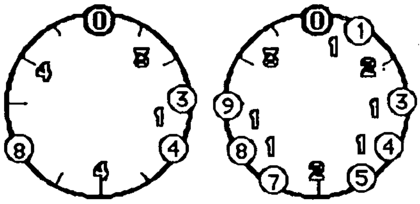


4-18 B [102111] 8-18 B [546553]

5/3

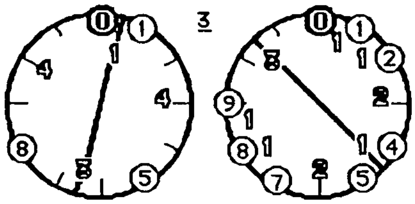


4-19 A [101310] 8-19 A [545752]

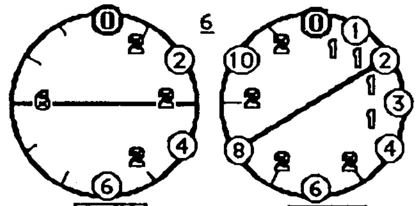


4-19 B [101310] 8-19 B [545752]

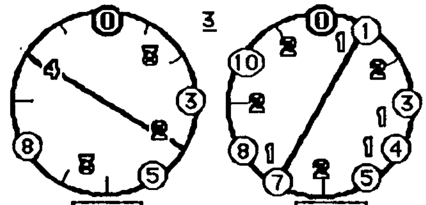
3



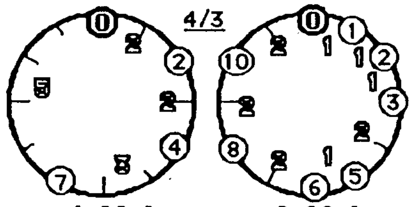
4-20 [101220] 8-20 [545662]



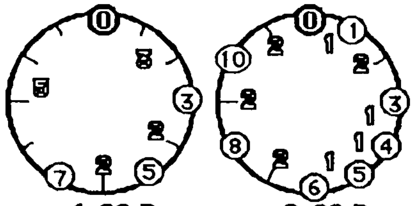
4-21 8-21
[030201] [474643]



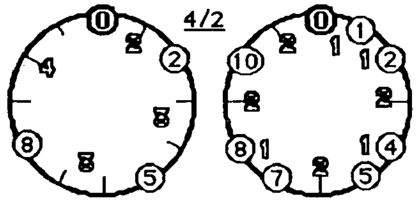
4-26 8-26
[012120] [456562]



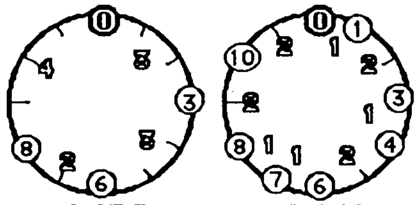
4-22 A 8-22 A
[021120] [465562]



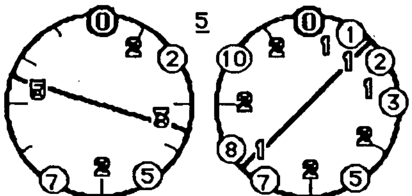
4-22 B 8-22 B
[021120] [465562]



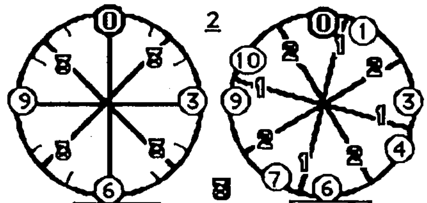
4-27 A 8-27 A
[012111] [456553]



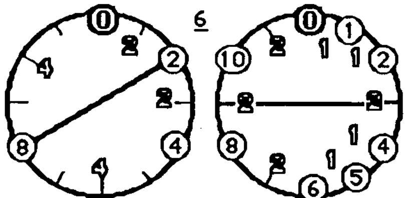
4-27 B 8-27 B
[012111] [456553]



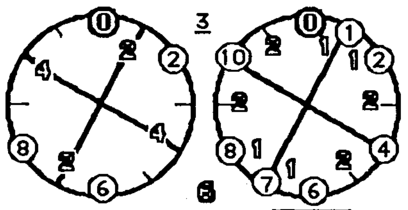
4-23 8-23
[021030] [465472]



4-28 8-28
[004002] [448444]

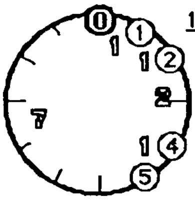


4-24 8-24
[020301] [464743]

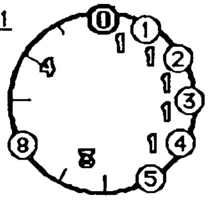


4-25 8-25
[020202] [464644]

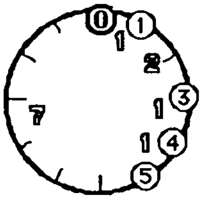
1/1



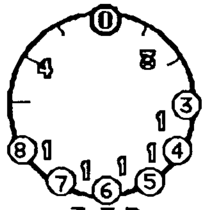
5-3 A
[322210]



7-3 A
[544431]



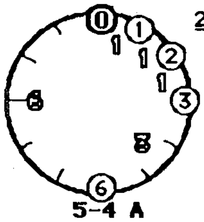
5-3 B
[322210]



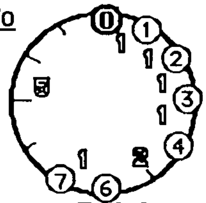
7-3 B
[544431]

#5/#7

2/0

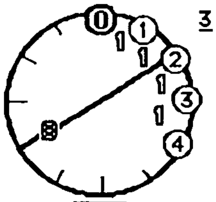


5-4 A
[322111]

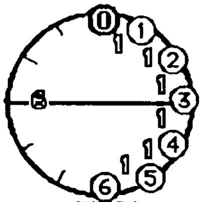


7-4 A
[544332]

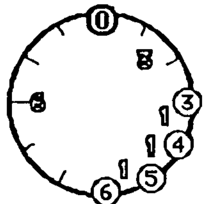
3



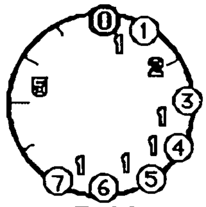
5-1
[432100]



7-1
[654321]

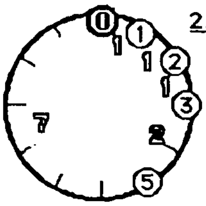


5-4 B
[322111]

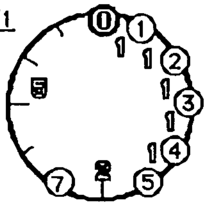


7-4 B
[544332]

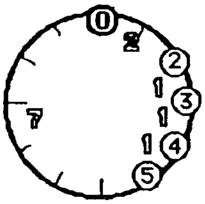
2/1



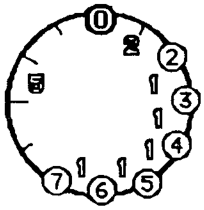
5-2 A
[332110]



7-2 A
[554331]

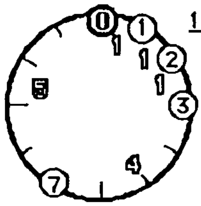


5-2 B
[332110]

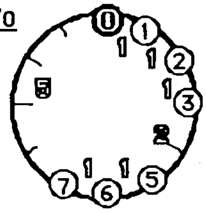


7-2 B
[554331]

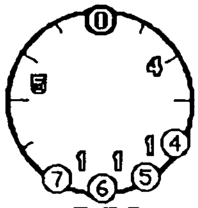
1/0



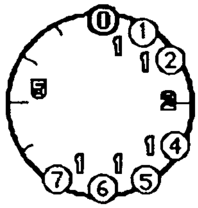
5-5 A
[321121]



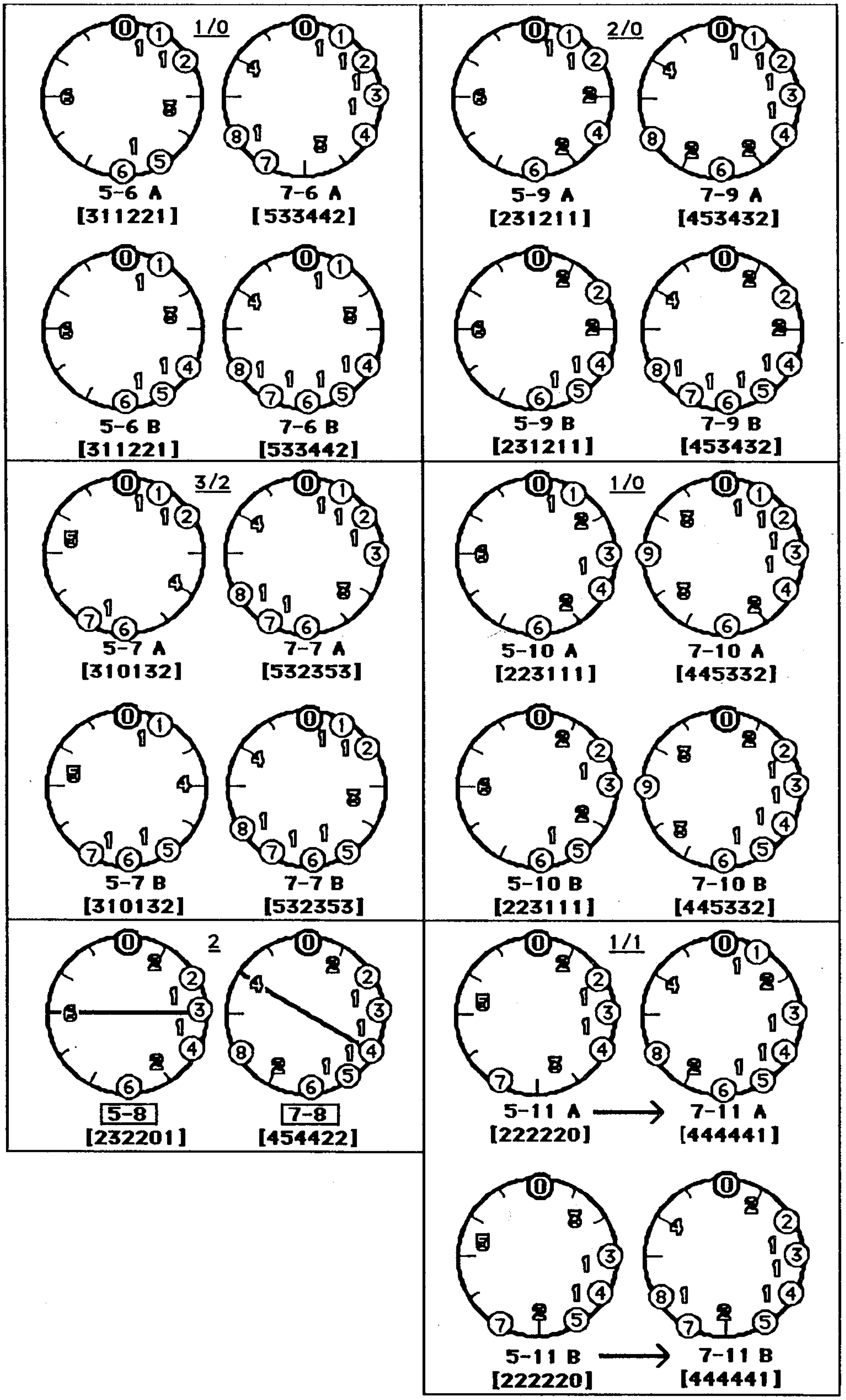
7-5 A
[543342]

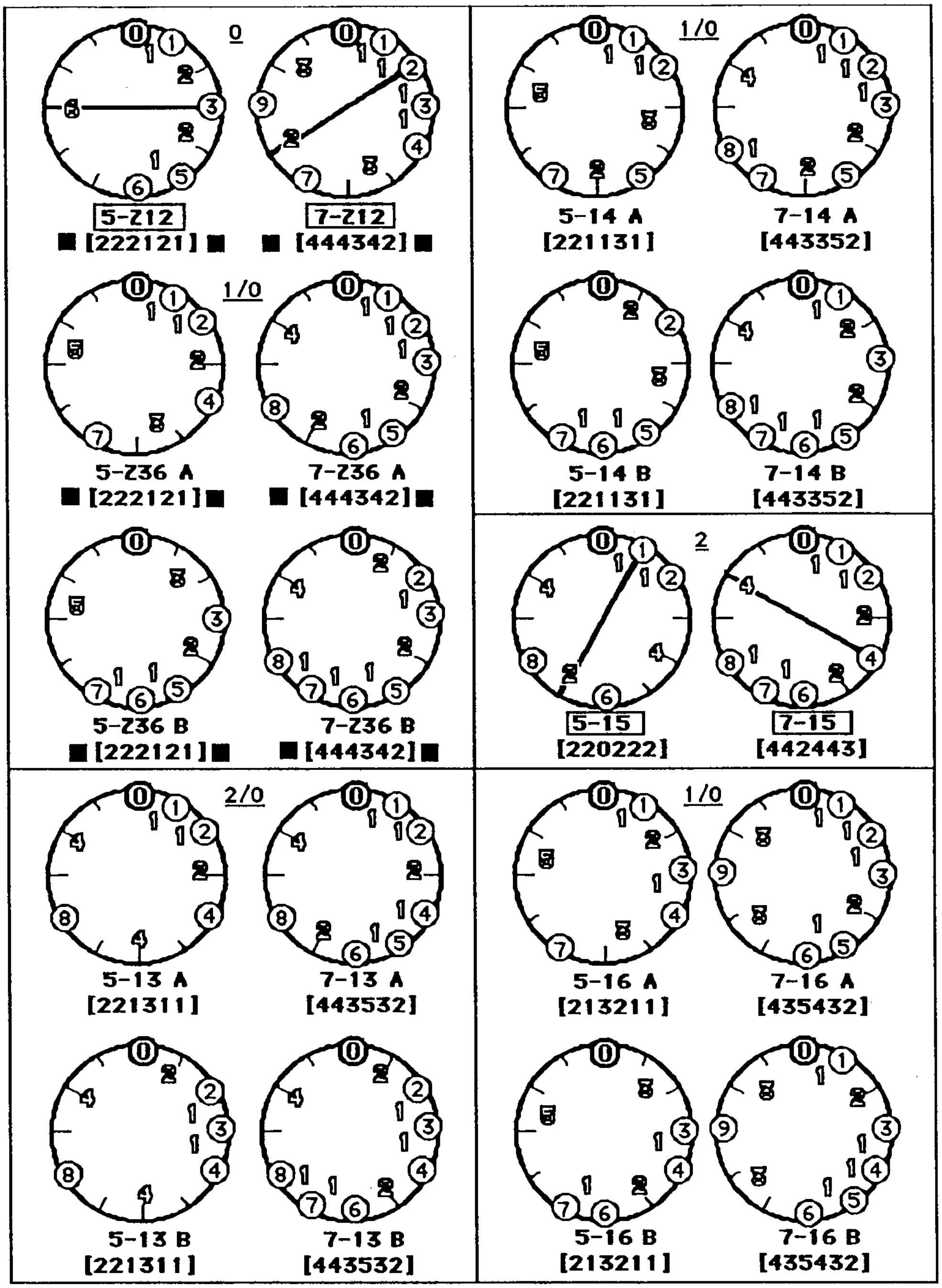


5-5 B
[321121]

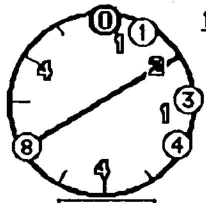


7-5 B
[543342]


1/0
5-6 A
[311221]
7-6 A
[533442]
5-6 B
[311221]
7-6 B
[533442]
2/0
5-9 A
[231211]
7-9 A
[453432]
5-9 B
[231211]
7-9 B
[453432]
3/2
5-7 A
[310132]
7-7 A
[532353]
5-7 B
[310132]
7-7 B
[532353]
1/0
5-10 A
[223111]
7-10 A
[445332]
5-10 B
[223111]
7-10 B
[445332]
2
5-8
[232201]
7-8
[454422]
1/1
5-11 A → 7-11 A
[222220]
[444441]
5-11 B → 7-11 B
[222220]
[444441]

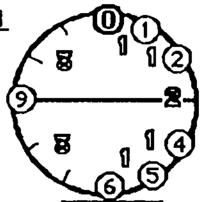

0
5-Z12
[222121]
7-Z12
[444342]
1/0
5-14 A
[221131]
7-14 A
[443352]
1/0
5-Z36 A
[222121]
7-Z36 A
[444342]
5-14 B
[221131]
7-14 B
[443352]
5-Z36 B
[222121]
7-Z36 B
[444342]
2
5-15
[220222]
7-15
[442443]
2/0
5-13 A
[221311]
7-13 A
[443532]
1/0
5-16 A
[213211]
7-16 A
[435432]
5-13 B
[221311]
7-13 B
[443532]
5-16 B
[213211]
7-16 B
[435432]

1



5-Z17

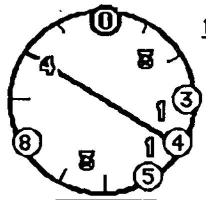
■ [212320] ■



7-Z17

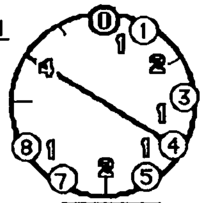
■ [434541] ■

1



5-Z37

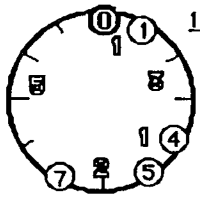
■ [212320] ■



7-Z37

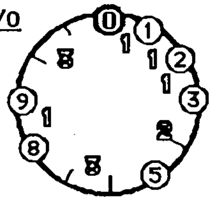
■ [434541] ■

1/0



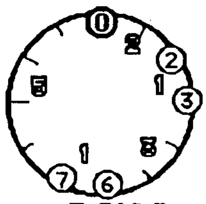
5-Z18 A

■ [212221] ■



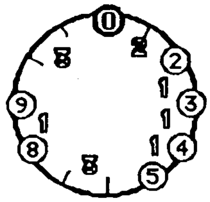
7-Z18 A

■ [434442] ■



5-Z18 B

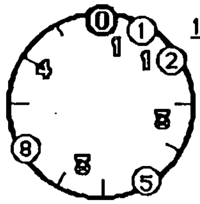
■ [212221] ■



7-Z18 B

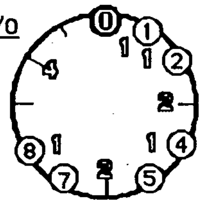
■ [434442] ■

1/0



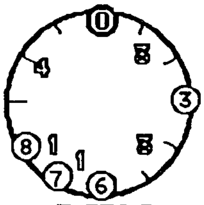
5-Z38 A

■ [212221] ■



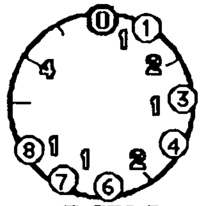
7-Z38 A

■ [434442] ■



5-Z38 B

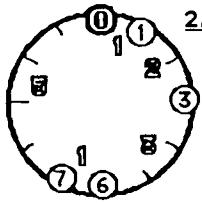
■ [212221] ■



7-Z38 B

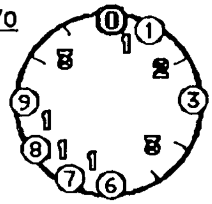
■ [434442] ■

2/0



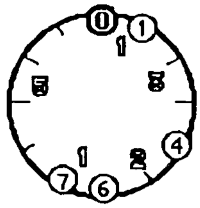
5-19 A

[212122]



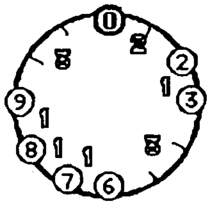
7-19 A

[434343]



5-19 B

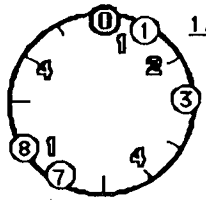
[212122]



7-19 B

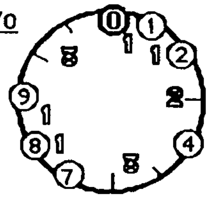
[434343]

1/0



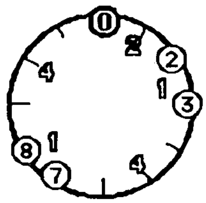
5-20 A

[211231]



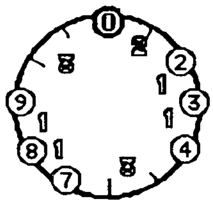
7-20 A

[433452]



5-20 B

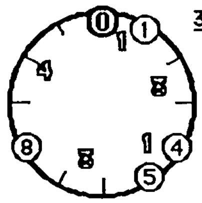
[211231]



7-20 B

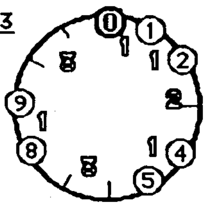
[433452]

3/3



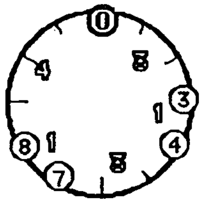
5-21 A

[202420]



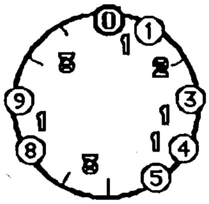
7-21 A

[424641]



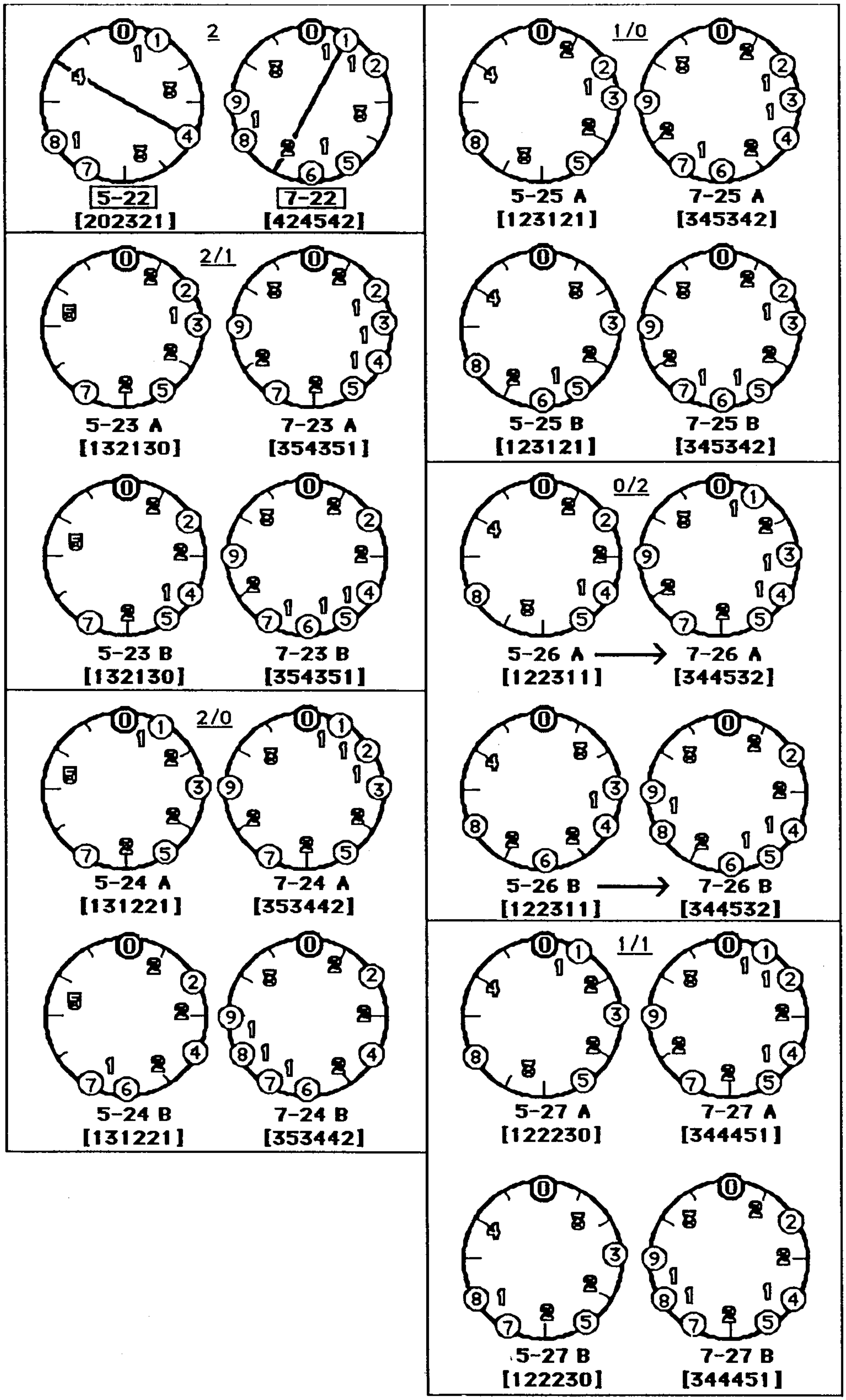
5-21 B

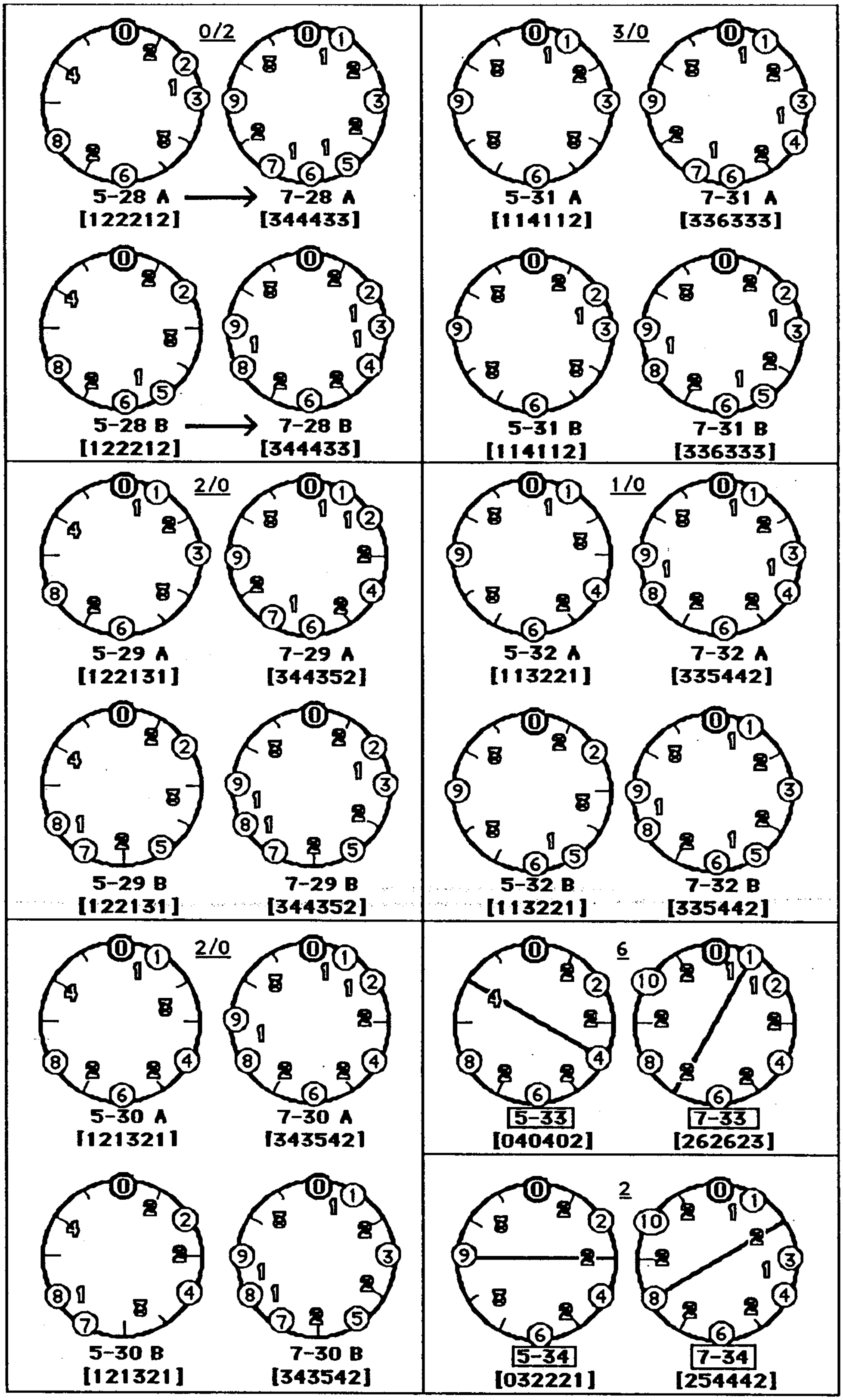
[202420]

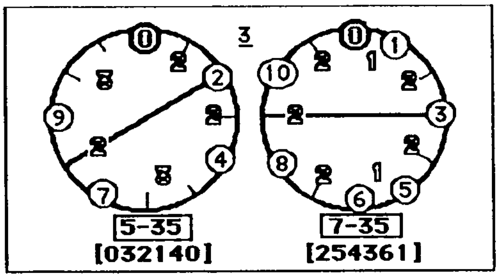


7-21 B

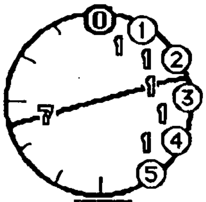
[424641]


2
5-22
[202321]
7-22
[424542]
2/1
5-23 A
[132130]
7-23 A
[354351]
5-23 B
[132130]
7-23 B
[354351]
2/0
5-24 A
[131221]
7-24 A
[353442]
5-24 B
[131221]
7-24 B
[353442]
1/0
5-25 A
[123121]
7-25 A
[345342]
5-25 B
[123121]
7-25 B
[345342]
0/2
5-26 A
[122311]
7-26 A
[344532]
5-26 B
[122311]
7-26 B
[344532]
1/1
5-27 A
[122230]
7-27 A
[344451]
5-27 B
[122230]
7-27 B
[344451]

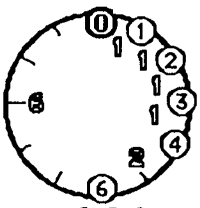

0/2
5-28 A
[122212]
7-28 A
[344433]
5-28 B
[122212]
7-28 B
[344433]
3/0
5-31 A
[114112]
7-31 A
[336333]
5-31 B
[114112]
7-31 B
[336333]
2/0
5-29 A
[122131]
7-29 A
[344352]
5-29 B
[122131]
7-29 B
[344352]
1/0
5-32 A
[113221]
7-32 A
[335442]
5-32 B
[113221]
7-32 B
[335442]
2/0
5-30 A
[121321]
7-30 A
[343542]
5-30 B
[121321]
7-30 B
[343542]
6
5-33
[040402]
7-33
[262623]
2
5-34
[032221]
7-34
[254442]


3
5-35
[032140]
7-35
[254361]

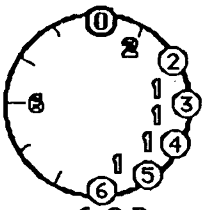
#6



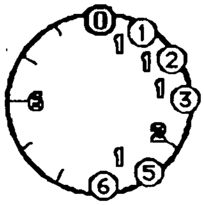
6-1
[543210]



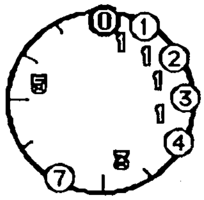
6-2 A
[443211]



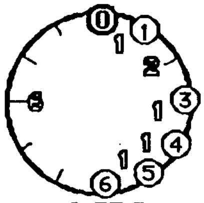
6-2 B
[443211]



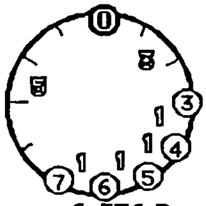
6-Z3 A
■ [433221] ■



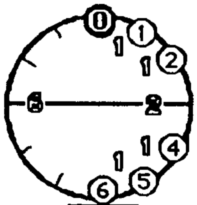
6-Z36 A
■ [433221] ■



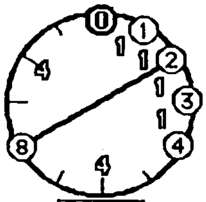
6-Z3 B
■ [433221] ■



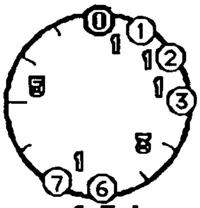
6-Z36 B
■ [433221] ■



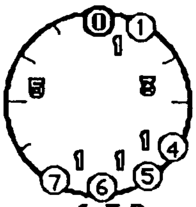
6-Z4
■ [432321] ■



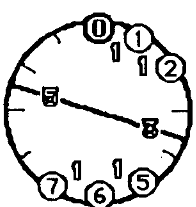
6-Z37
■ [432321] ■



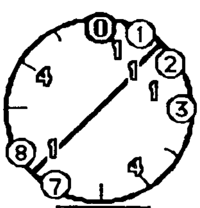
6-5 A
[422232]



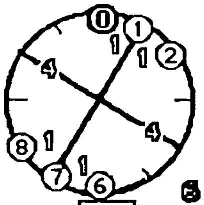
6-5 B
[422232]



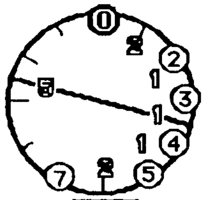
6-Z6
■ [421242] ■



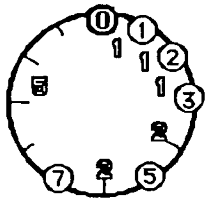
6-Z38
■ [421242] ■



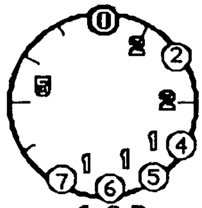
6-7
[420243]



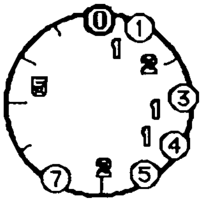
6-8
[343230]

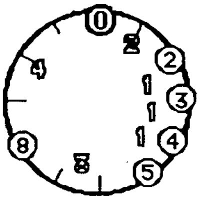


6-9 A
[342231]

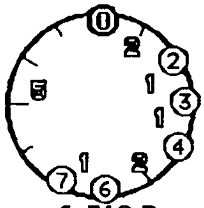


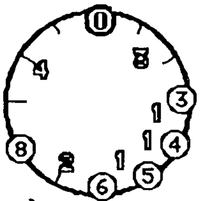
6-9 B
[342231]



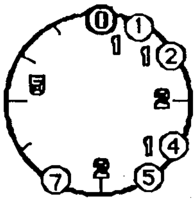


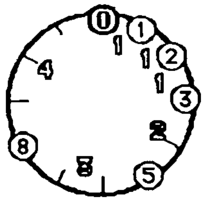
6-Z10 A ⟶ 6-Z39 A
■ [333321] ■ ■ [333321] ■



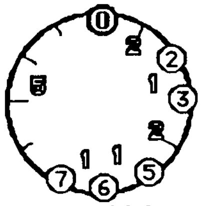


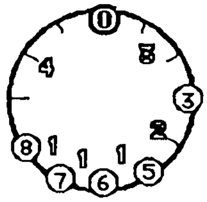
6-Z10 B ⟶ 6-Z39 B
■ [333321] ■ ■ [333321] ■



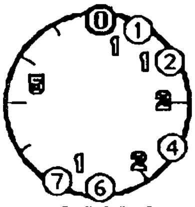


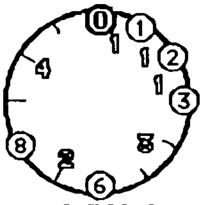
6-Z11 A 6-Z40 A
■ [333231] ■ ■ [333231] ■



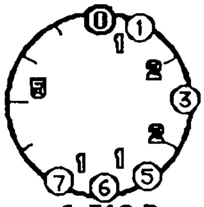


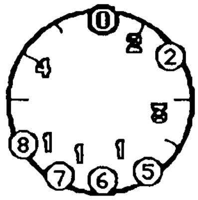
6-Z11 B 6-Z40 B
■ [333231] ■ ■ [333231] ■



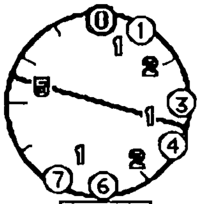


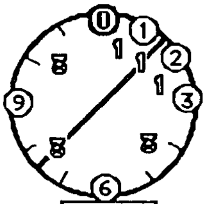
6-Z12 A 6-Z41 A
■ [332232] ■ ■ [332232] ■



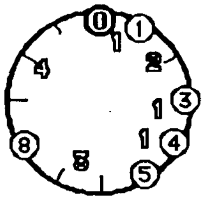


6-Z12 B 6-Z41 B
■ [332232] ■ ■ [332232] ■

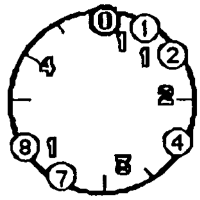




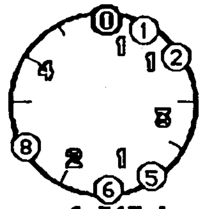
6-Z13 6-Z42
■ [324222] ■ ■ [324222] ■



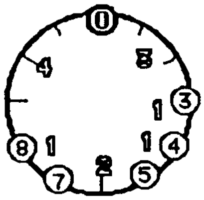
6-14 A
[323430]



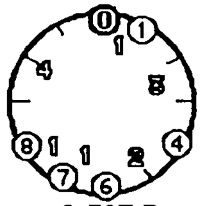
6-Z17 A
[322332]



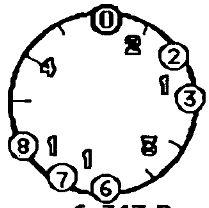
6-Z43 A
[322332]



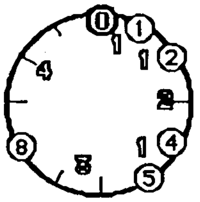
6-14 B
[323430]



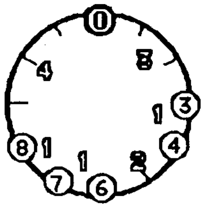
6-Z17 B
[322332]



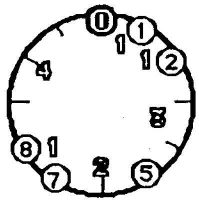
6-Z43 B
[322332]



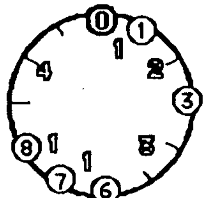
6-15 A
[323421]



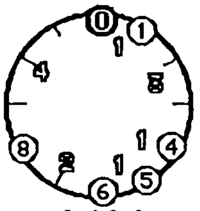
6-15 B
[323421]



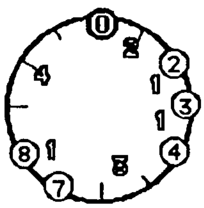
6-18 A
[322242]



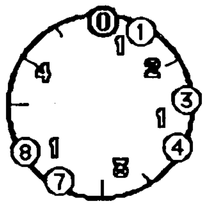
6-18 B
[322242]



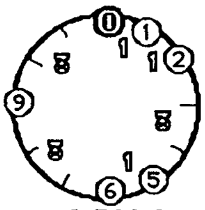
6-16 A
[322431]



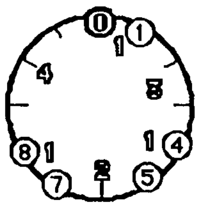
6-16 B
[322431]



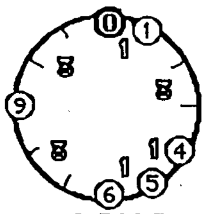
6-Z19 A
[313431]



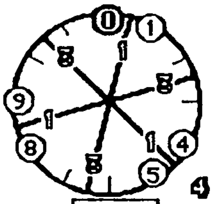
6-Z44 A
[313431]



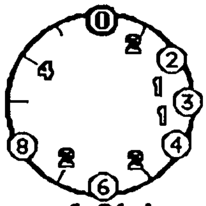
6-Z19 B
[313431]



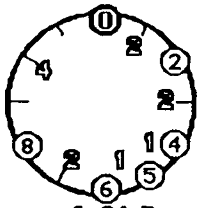
6-Z44 B
[313431]



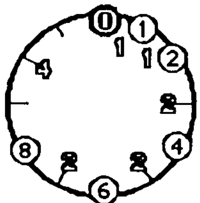
6-20
[303630]



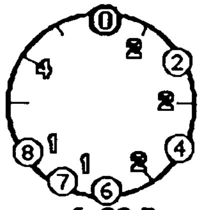
6-21 A
[242412]



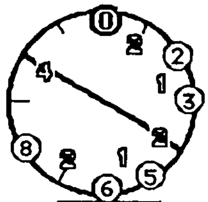
6-21 B
[242412]



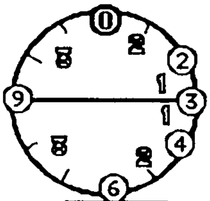
6-22 A
[241422]



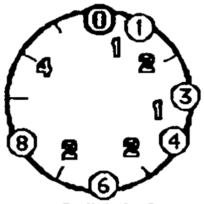
6-22 B
[241422]



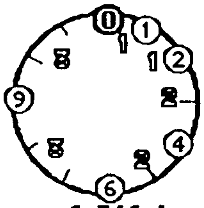
6-Z23
■ [234222] ■



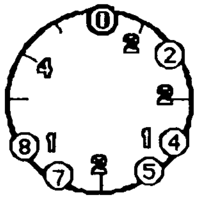
6-Z45
■ [234222] ■



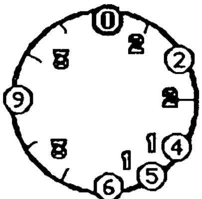
6-Z24 A
■ [233331] ■



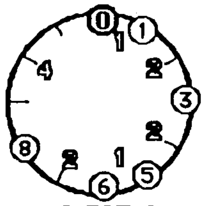
6-Z46 A
■ [233331] ■



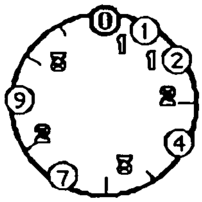
6-Z24 B
■ [233331] ■



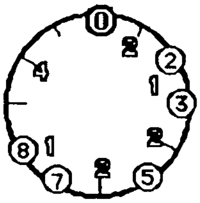
6-Z46 B
■ [233331] ■



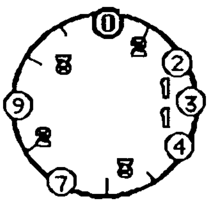
6-Z25 A
■ [233241] ■



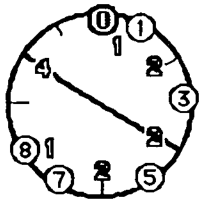
6-Z47 A
■ [233241] ■



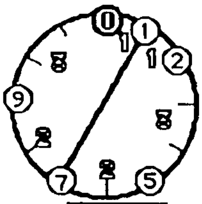
6-Z25 B
■ [233241] ■



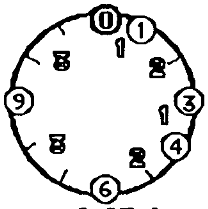
6-Z47 B
■ [233241] ■



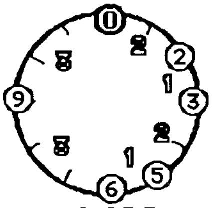
6-Z26
■ [232341] ■



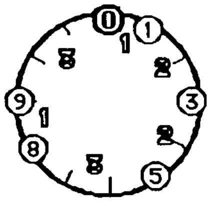
6-Z48
■ [232341] ■



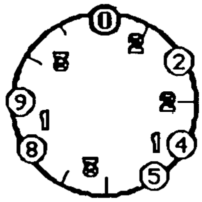
6-27 A
[225222]



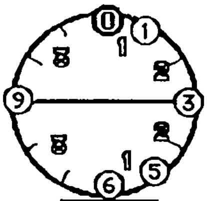
6-27 B
[225222]



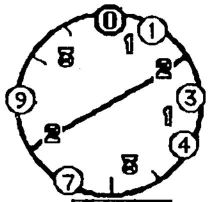
6-31 A
[223431]



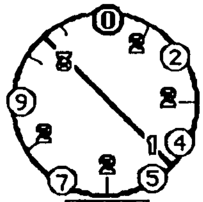
6-31 B
[223431]



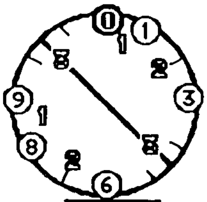
$\boxed{\text{6-Z28}}$
■ [224322] ■



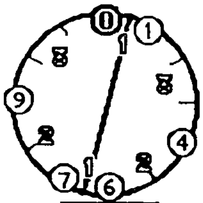
$\boxed{\text{6-Z49}}$
■ [224322] ■



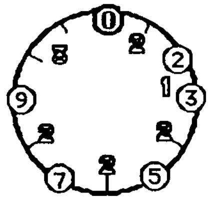
$\boxed{\text{6-32}}$
[143250]



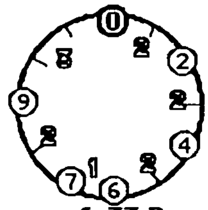
$\boxed{\text{6-Z29}}$
■ [224232] ■



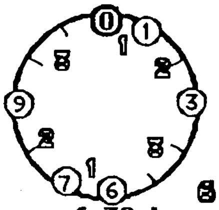
$\boxed{\text{6-Z50}}$
■ [224232] ■



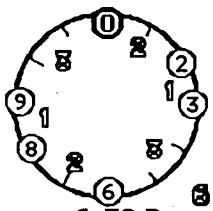
6-33 A
[143241]



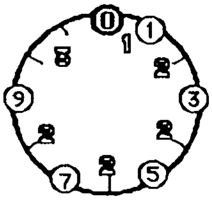
6-33 B
[143241]



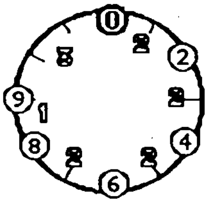
6-30 A
[224223]



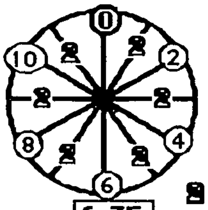
6-30 B
[224223]



6-34 A
[142422]



6-34 B
[142422]



$\boxed{\text{6-35}}$
[060603]

Sibelius-Akatemia
Musiikin tutkimuslaitos

ISBN 951-95539-9-1
ISSN 0786-5325
Helsinki 1989
Yliopistopaino