



Sävellyksen maisteriopintojen kirjallinen työ

Monioktaavisten asteikkojen generointi

Rekisterillisesti laajojen, sävelavaruudeltaan
uudistuvien sekä symmetristen asteikkojen luonti

Jaakko Kilpeläinen
2023

Taideyliopisto
Sibelius-Akatemia
Sävellyksen ja musiikinteorian aineryhmä

Korkeakoulu – Högskola – Academy Sibelius-Akatemia	Koulutusohjelma – Ämnesgrupp – Department Sävellys ja musiikinteoria	
Tekijä – Författare – Author Jaakko Kilpeläinen		
Työn nimi – Arbetets titel – Title Monioktaavisten asteikkojen generointi: Rekisterillisesti laajojen, sävelvaruudeltaan uudistuvien sekä symmetristen asteikkojen luonti		
Työn laji – Arbetets art – Level Maisteriopintojen kirjallinen työ	Aika – Datum – Month and year 17.4.2023	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages 21
Tiivistelmä – Referat – Abstract Tutkielmassa käsitellään tapaa generoida asteikkoja, joiden ominaisuuksien lähtökohdat ovat rekisterillinen laajuus, sävelvaruudellinen uudistuminen sekä symmetrisyys. Asteikkojen generoinnin ensimmäisessä vaiheessa määritetään kaikki tavat, kuinka yksittäisten tasaoktaavien lukumäärien sisältämien puoliaskelten summat voidaan jakaa tekijöihin, mikä kertoo kuinka moneen yhtä suureen osioon kukin oktaavien lukumäärä on mahdollista jakaa. Tämän jälkeen määritetään tarkennetut ehdot sille, kuinka tasasuuriin väleihin jaetut oktaavien lukumäärien osiot voidaan täydentää niin, että viime kädessä syntyvä asteikko on ennalta määritettyjen tavoitteiden mukainen. Tapoja jakaa tasaoktaavien lukumääriä on paljon, minkä johdosta lopulliseen asteikkojen generoimiseen valikoidaan ainoastaan 2:n ja 3:n oktaavin laajuiset tapaukset. Kyseisistä tapauksista käsitellään vain tilanteet, joissa 2:n oktaavin laajuinen kokonaisuus on jaettu kolmeen yhtä suureen osioon ja 3:n oktaavin laajuinen kokonaisuus neljään yhtä suureen osioon. Tutkielman viimeisessä vaiheessa analysoidaan generoitujen asteikkojen yleisiä sävelvaruudellisia ja transpositionaalisia ominaisuuksia, sekä kuinka asteikot suhtautuvat muihin yleisiin asteikkorakenteisiin.		
Avainsanat – Nyckelord – Keywords joukkoteoria, laajuus, musiikinteoria, symmetria, sävelasteikot, säveljärjestelmät, säveloppi		
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information Työ on alkuperäistarkastettu Turnitin-plagiaatintunnistusjärjestelmällä 17.4.2023 musiikinteorian professori Lauri Suurpään toimesta.		

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Asteikkojen muodostamiseen liittyvät käsitteet	3
2.1	Tasaoktaavien jaollisuus sekä tekijöihin jakaminen	3
2.2	Täydennysjoukkojen inversionaalisymmetrisyysehto	6
2.3	Asteittaisuusehto	7
2.4	Jakointervallin parillisuus-/parittomuusehto	7
3	Asteikkojen generointi	9
3.1	2:n oktaavin asteikko	10
3.2	3:n oktaavin asteikko	11
4	Asteikkojen ominaisuudet	13
4.1	2:n oktaavin asteikon ominaisuudet	14
4.2	3:n oktaavin asteikon ominaisuudet	17
5	Yhteenveto	20
	Lähteet	21
	Asiahakemisto	21

1 Johdanto

Tammikuussa 2022 keskustelin sävellysopettajani Matthew Whittalin kanssa luomastani sävelrakenteesta, joka pohjautui yhden oktaavin laajuiseen kahdeksan säveliseen asteikkoon. Opettajani kommentoi, ettei luomassani sävelrakenteessa ole sellaisenaan ongelmaa, mutta sen heikkoutena on sävelavaruudellinen toistuvuus asteikkoa laajennettaessa rekisterillisesti. Kyseinen tapaus johti pohdintaan olisiko mahdollista luoda laajuudeltaan suurempia kuin yhden oktaavin sävelrakenteita, joiden sävelluokallinen sisältö olisi myös mahdollisimman rikas asteikon sisäisesti. Tämä ajatus johti lopulta tämän tutkimuksen sekä siinä esitettyjen menetelmien syntymiseen.

Tässä työssä esittelen tavan generoida asteikkoja, joiden ominaisuuksien lähtökohtina ovat rekisterillinen laajuus, sävelavaruudellinen uudistuminen sekä symmetrisyys. Asteikkojen rekisterillinen laajuus pohjautuu ajatukseen, että generoitavat asteikot ovat laajuudeltaan suurempia kuin yksi oktaavi. Sävelavaruudellinen uudistuminen tarkoittaa asteikot muodostavien sävelluokkien homogeenistä määrällistä sekä rekisterillistä jakautumista asteikkorakenteiden sisällä. Tavoite asteikkojen symmetrisestä rakenteesta asettaa selkeät reunaehdot asteikon askelmien intervallisten suuruuksien järjestäytymiselle. Symmetrisyyden on määrä päteä koko asteikkojen laajuuteen, mutta myös niiden sisäisiin katkelmiin.

Yksinkertaisuudessaan tapani lähestyä asteikkojen generointia perustuu kahteen vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa määritetään kaikki tavat, joilla kukin tasaoktaavien lukumäärä on mahdollista jakaa saman kokoisiin osioihin. Toisessa vaiheessa etsitään ja määritetään ehdot näiden osioiden täydentämiseksi niin, että täydennettyjen osioiden myötä syntyvät kokonaiset asteikot ovat asetetun päämäärän mukaisesti symmetrisiä sekä sävelavaruudeltaan uudistuvia kokonaisuuksia. Tässä työssä lähestyn asteikkojen generointia puhtaasti teknisten aspektien kannalta, minkä johdosta työ ei ota kantaa luotujen asteikkojen taiteellisiin mahdollisuuksiin.

Tapaa luoda monioktaavisia asteikkoja käsitellään pintapuolisesti Vincent Persichettin teoksessa *Twentieth-Century Harmony*. Teoksessaan Persichetti (1961, 48-49) ei kuitenkaan paneudu juurikaan siihen, kuinka monen oktaavin laajuisia sävelrakenteita hänen esittelemänsä menetelmä luo, mikä taas on keskeinen lähtökohta omassa tutkimuksessani. Persichetin menetelmä monioktaavisten sävelrakenteiden luontiin pohjautuu siihen, että kahden eri yhden oktaavin laajuisen asteikon tai usean päällekkäisen yksittäisen joukon, esimerkiksi tetrakordin $[0\ 2\ 4\ 6]$, yhdistelmä voi olla laajuudeltaan kahden tai useamman oktaavin kokonaisuus. Tutkielmani menetelmä generoida monioktaavisia asteikkoja perustuu osittain Persichetin jälkimmäisenä mainittuun yksittäisten joukkojen perättäiselle yhdistämiselle. Työssäni yhdistettäväksi valittavien joukkojen kriteerit ovat kuitenkin huomattavasti Persichettiä tarkemmin määritetty ja ne huomioivat viime kädessä muodostuvan asteikon laajuuden.

Tutkimukseni perustuu tasavireiseen 12-sävelavaruuteen, minkä johdosta enharmonisesti toisiaan vastaavat sävelet ovat paitsi enharmonisesti tasavertaisia myös funktionaalisesti. On kuitenkin tärkeää huomioida, että tutkimukseni ei perustu sävelluokka-avaruuteen, jos-

sa sävelten rekisterillisellä jakaantumisella ei ole väliä – päinvastoin. Työni suorastaan pohjautuu ajatukselle sävelten rekisterillisen jakaantumisen ainutlaatuisuudelle. Esimerkiksi, vaikka sävelet c^1 ja c^2 ovat sävelluokaltaan vastaavat toistensa kanssa, ne ovat rekisterillisesti kaksi poikkeavaa säveltä. Sävelten nimeäminen toteutetaan tässä työssä suomalaisten ja eurooppalaisten käytänteiden mukaisesti, missä sävel b on alennettu h ja keski-C on sävel c^1 . Intervallien nimeämiseen hyödynnetään pääasiallisesti sävelintervalleja (en. pitch interval), jossa kahden sävelen välinen etäisyys ilmoitetaan sävelten välisten puoliaskelten lukumäärän mukaisesti (Straus 1990, 8). Esimerkiksi intervalli suuri terssi on vastaava sävelintervallin neljä kanssa ja intervalli puhdas kvintti on vastaava sävelintervallin seitsemän kanssa. Toisinaan viitataan kuitenkin myös perinteisiin intervallien nimiin tekstin selkeyden vuoksi.

Useammasta kuin kahdesta sävelestä muodostuvia sävelryhmiä eli joukkoja nimeän ja käsittelen joukkojen Forte-listauksen sekä joukkoteoriassa yleisesti käytetyn päämuodon mukaan. Forte-listaus on joukkoteorian pioneerin Allen Forten listaus säveljoukoista, jossa jokainen joukko nimetään kahdella viivalla toisistaan erotetulla numerolla. Ensimmäinen numero kertoo joukon sävelten määrän, ja toinen kertoo joukon indeksin Forten listauksessa (Straus 1990, 57). Esimerkiksi joukko 6-32 on 32. joukko Forten listauksen kuusisävelisistä joukoista. Päämuoto on joukon sellainen muoto, mikä alkaa aina numerosta nolla ja on sen jälkeen pakatuimmassa muodossaan vasemmalle (Straus 1990, 57). Pakkautumisella tarkoitetaan joukon sisältämien sävelten välisten intervallin asettumista päämuodossa järjestyksessä pienimmästä suurimpaan niin, että koko joukon laajuus on suppein mahdollinen. Joukkojen päämuodot ja sen inversiot erotan tarvittaessa toisistaan merkitsemällä joukon olevan joko muotoa A tai B. A on joukon päämuodon mukainen joukko, ja B sen inversio. Esimerkiksi joukko $[0\ 1\ 3]A$ on yksinkertaisesti joukko $[0\ 1\ 3]$, mutta $[0\ 1\ 3]B$ on päämuodon inversion normaalimuodon mukainen joukko $\{0\ 2\ 3\}$. Edellä mainitun merkitsemistavan etu on siinä, että tällöin joukkojen xA ja xB inversionaalinen yhteys on selkeästi havaittavissa. Joukkojen ominaisuuksien lähteenä käytän Joseph N. Strausin teosta *Introduction to Post-Tonal Theory*, joka sisältää perusteellisesti tietoa joukkojen ominaisuuksista.

Loin tämän kirjallisen työn alun perin musiikinteorian kandidaatintutkielmaksi keväällä 2023 ja sisällytin sen osaksi sävellyksen maisteritutkiintoani syksyllä 2025.

2 Asteikkojen muodostamiseen liittyvät käsitteet

Tässä luvussa määritetään asteikkojen muodostamiseen liittyvät konseptit, joita ovat tasaoktaavien lukumäärien jaollisuus sekä asteikkojen muodostamiseen määritetyt ehdot. Lisäksi esitetään asteikkojen generointiin luotua käsitteistöä (omani), mikä sisältää muun muassa termit: *oktaaviluku*, *jakoväli* sekä *-intervalli*, *täydennysjoukko* ja *jakosävel*.

2.1 Tasaoktaavien jaollisuus sekä tekijöihin jakaminen

Johdannossa todetaan, että tutkielman lähestymistapa lukumäärältään monioktaavisten asteikkojen generointiin pohjautuu osittain Persichetin (1961, 48-49) esittämälle ajatukselle yksittäisten joukkojen perättäiselle yhdistämiselle. Sattumanvaraisten ja sattuman laajuisten joukkojen yhdistäminen ei kuitenkaan huomioi kuinka laajan kokonaisuuden joukkojen yhdistelmä luo. Täten tietyn oktaavien lukumäärän laajuisten kokonaisuuksien luomiseksi, on mahdollisten yksittäisten yhdistettävien joukkojen laajuuden määrittäminen aloitettava viime kädessä tavoiteltavan kokonaisuuden laajuuden näkökulmasta. Tämä tarkoittaa, että on selvitettävä millä kaikilla tavoin voidaan halutun laajuinen kokonaisuus jakaa saman suuruisiin osioihin niin, että osioiden perättäinen yhdistäminen luo tavoitellun laajuisen kokonaisuuden. Tässä työssä tavoitellut kokonaisuudet ovat laajuudeltaan tasaoktaaveja. Jotta voidaan määrittää mahdollisuudet jakaa yksi, kaksi, kolme ja sitä useammat oktaavien lukumäärät saman suuruisiin osioihin, on käytännössä selvitettävä kunkin tasaoktaavien lukumäärän matemaattinen jaollisuus. Jotta eri oktaavien lukumäärien jaollisuutta voidaan tarkastella, on tasaoktaavien lukumäärät muutettava yksiselitteiseksi luvuksi. Tälle luvulle käytetään termiä *oktaaviluku*. Koska tutkimus perustuu tasavireiseen 12-sävelavaruuteen, voidaan oktaaviluvut tasaoktaavien lukumäärille määrittää kertomalla oktaavien lukumäärä yhden oktaavin sisältämien askelmien määrällä, mikä 12-sävelavaruudessa on 12.

$$\text{oktaavien määrä} \cdot 12 = \text{oktaaviluku} \quad (1)$$

Taulukossa 2.1 määritetään tasaoktaavien oktaaviluvut lukumäärältään kahdeksaan oktaaviin asti.

oktaavien lukumäärä	oktaaviluku
1	$1 \cdot 12 = \mathbf{12}$
2	$2 \cdot 12 = \mathbf{24}$
3	$3 \cdot 12 = \mathbf{36}$
4	$4 \cdot 12 = \mathbf{48}$
5	$5 \cdot 12 = \mathbf{60}$
6	$6 \cdot 12 = \mathbf{72}$
7	$7 \cdot 12 = \mathbf{84}$
8	$8 \cdot 12 = \mathbf{96}$

Taulukko 2.1

Nyt oktaavilukujen avulla tasaoktaavien jaollisuutta on mahdollista tarkastella. Kokonaislukujen jaollisuuden määritelmää käsitellään G. H. Hardyn ja E. M. Wrightin teoksessa *An Introduction to the Theory of Numbers*. Positiivinen kokonaisluku a on jaollinen nolasta poikkeavalla positiivisella kokonaisluvulla b , jos on olemassa positiivinen kokonaisluku c jolla:

$$a = b \cdot c, \quad \text{kun} \quad a, b, c \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad b > 0 \quad (\text{Hardy ja Wright 1938, 1}) \quad (2)$$

Luonnolliset luvut $\mathbb{N}$ ovat luku nolla ja positiiviset kokonaisluvut. Vaihtoehtoisesti voidaan myös ilmaista, että luonnolliset luvut b ja c ovat luvun a tekijöitä, eli luku a voidaan esittää lukujen b ja c tulona. Luvusta riippuen tietyllä luvulla voi olla useita eri vaihtoehtoja, joilla se voidaan jakaa tekijöihin. Selvittämällä kaikki tavat, joilla oktaaviluvut voidaan jakaa tekijöihin, saadaan selville myös kaikki tavat kuinka tasaoktaavien lukumäärät voidaan jakaa saman suuruisiin osioihin. Taulukossa 2.2 osoitetaan kaikki tavat, joilla oktaaviluvut lukumäärältään kahdeksaan oktaavin asti voidaan jakaa tekijöihin. Taulukon ensimmäinen sarake (vasemmalta) kertoo oktaavien lukumäärän, toinen sarake kertoo kyseisen oktaavien lukumäärän oktaaviluvun ja sarakkeesta kolme eteenpäin esitetään kaikki vaihtoehdot, joilla rivin oktaaviluku voidaan jakaa tekijöihin (tulon vaihdannaissääntöä ei huomioida taulukossa).

1	12	12·1	6·2	4·3	3·4	2·6	1·12						
2	24	24·1	12·2	8·3	6·4	4·6	3·8	2·12	1·24				
3	36	36·1	18·2	12·3	9·4	6·6	4·9	3·12	2·18	1·36			
4	48	48·1	24·2	16·3	12·4	8·6	6·8	4·12	3·16	2·24	1·48		
5	60	60·1	30·2	20·3	15·4	12·5	10·6	6·10	5·12	4·15	3·20	2·30	1·60
6	72	72·1	36·2	24·3	18·4	12·6	9·8	8·9	6·12	4·18	3·24	2·36	1·72
7	84	84·1	42·2	28·3	21·4	14·6	12·7	7·12	6·14	4·21	3·28	2·42	1·84
8	96	96·1	48·2	32·3	24·4	16·6	12·8	8·12	6·16	4·24	3·32	2·48	1·96

Taulukko 2.2 Oktaaviluvut jaettuna kaikilla tavoilla tekijöihin kahdeksaan oktaaviin asti.

Taulukon 2.2 sisältö kertoo ratkaisevaa informaatiota siitä, kuinka eri oktaavien lukumäärät voidaan jakaa. Taulukon sisältö on kuitenkin hyvin numeerista, eikä täten kuvaa selkeästi kuinka moneen osaan missäkin tapauksessa oktaavien lukumäärä on jaettu ja kuinka laaja kukin osio on. Tekijöiden kontekstia voidaan hahmottaa lisää niin, että taulukon 2.2 sarakkeesta kolme eteenpäin esitettyjen kertolaskujen oikean puoleinen luku kertoo kuinka moneen yhtä suureen osioon rivin oktaavien lukumäärä jaetaan. Kertolaskun vasemman puoleinen luku taas kertoo kuinka laaja kyseisellä osioiden määrällä yksittäinen osio on sävelintervallina. Näitä osioita kutsutaan termillä *jakoväli* ja sen suuruutta termillä *jakointervalli*. Taulukossa 2.3 havainnollistetaan kaikki tavat kuinka moneen jakoväliin tietty tasaoktaavien lukumäärä voidaan jakaa, ja sen alle yksittäisen jakovälin jakointervallin suuruuden sävelintervallina kyseisellä jakovälien määrällä.

1 oktaavi, oktaaviluku 12

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	12
jakointervallin suuruus	12	6 (tritonus)	4 (s3)	3 (p3)	2 (s2)	1 (p2)

2 oktaavia, oktaaviluku 24

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	8	12	24
jakointervallin suuruus	24	12	8 (p6)	6	4	3	2	1

3 oktaavia, oktaaviluku 36

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	9	12	18	36
jakointervallin suuruus	36	18	12	9 (s6)	6	4	3	2	1

4 oktaavia, oktaaviluku 48

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
jakointervallin suuruus	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1

5 oktaavia, oktaaviluku 60

jakovälien määrä	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
jakointervallin suuruus	60	30	20	15	12	10 (p7)	6	5 (pu4)	4	3	2	1

6 oktaavia, oktaaviluku 72

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
jakointervallin suuruus	72	36	24	18	12	9	8	6	4	3	2	1

7 oktaavia, oktaaviluku 84

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84
jakointervallin suuruus	84	42	28	21	14	12	7 (pu5)	6	4	3	2	1

8 oktaavia, oktaaviluku 96

jakovälien määrä	1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	96
jakointervallin suuruus	96	48	32	24	16	12	8	6	4	3	2	1

Taulukko 2.3 Oktaavilukujen jaollisuus eriteltynä jakovälien määrään ja niitä vastaavien jakointervallien suuruuksien mukaan (vaihtoehdot, joissa jakointervallien suuruudet ovat merkitty myös perinteisellä intervallinimellä, ovat sellaisia kyseisen oktaavin lukumäärään liittyviä uniikkeja tilanteita, joihin palataan luvussa 3).

Tiedossa ovat nyt kaikki tavat kuinka tasaoktaavien lukumäärät voidaan kahdeksaan oktaavin asti jakaa tasan yhtä suuriin osioihin 12-sävelavaruudessa. Kuten johdannossa todettiin, tämä oli asteikkojen generoinnin ensimmäinen vaihe. Seuraava vaihe asteikkomaisen rakenteen luomiseksi on jakovälien täydentäminen niin, että lopputulos on symmetrinen sekä sävelavaruudeltaan uudistuva. Jotta nämä aspektit täyttyisivät, on määritettävä tarkennetut ehdot sille kuinka jakovälit voidaan täydentää. Tämä voidaan ilmaista myös niin, että on määritettävä ehdot sille millaisia Persichetin (1961, 48-49) tapaan perättäin yhdisteltävät joukot voivat olla ominaisuuksiltaan. Ehdot jakovälien täydentämiselle määritetään niin, että päämäärä asteikkojen sävelavaruudellisesta uudistumisesta sekä symmetrisyydestä toteutuvat.

2.2 Täydennysjoukkojen inversionaalisymmetrisyysehto

Kun jakovälejä aletaan täydentää, voidaan ajatella, että jokainen jakoväli täytetään jollain tietyllä joukolla. Näitä joukkoja nimitetään *täydennysjoukoksi*. Asteikkojen johdonmukaisen rakenteen takaamiseksi tulee tapauskohtaisesti asteikon jokainen jakoväli täydentää joukoltaan samalaisella täydennysjoukolla. Tämän lisäksi täydennysjoukkojen tulee sisältää ominaisuuksiltaan inversionaalisymmetriaa ainakin yhdellä $T_n I$ -tasolla, koska tällöin täydennysjoukkojen symmetriset ominaisuudet kopioituvat koko viime kädessä syntyvän asteikon rakenteeseen taaten symmetrisen kokonaisrakenteen.

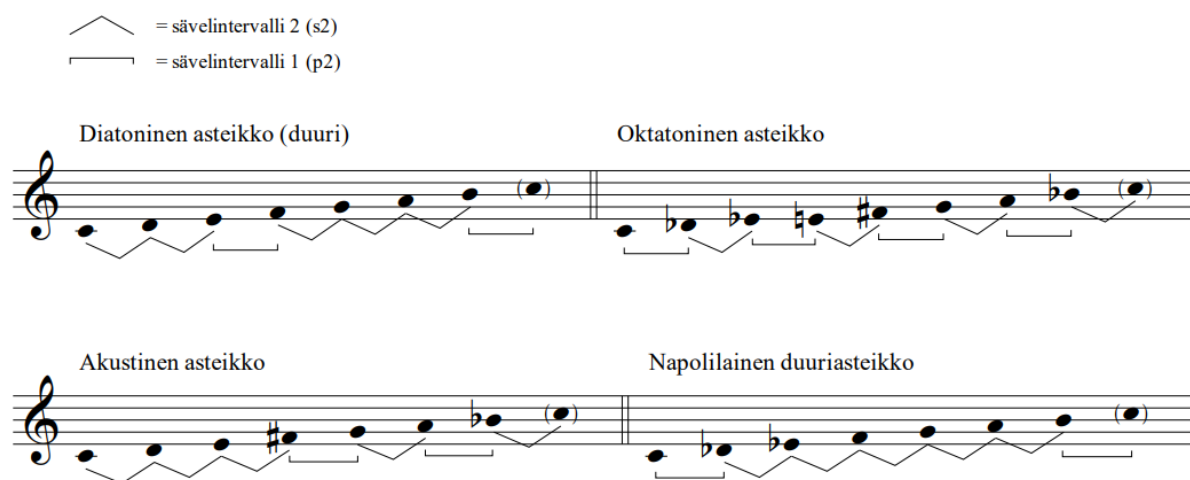
Täydennysjoukkojen inversionaalisymmetriset ominaisuudet johtavat täydennysjoukon olevan rakenteeltaan sellaisia, että ne voidaan jakaa kahteen yhtä suureen osaan niin, että niiden ylä- ja alapuoli ovat joukkoteoreettisesti samanlaiset. Täydennysjoukon x voidaan täten ilmaista muodostuvan itsensä ylä- ja alapuolen joukkojen yA ja yB summasta:

$$x = yA + yB \quad \text{tai} \quad x = yB + yA, \quad (3)$$

Tämä osaltaan johtaa siihen, että täydennysjoukot ovat aina sävelten lukumäärältään parillisia, sillä kahden parillisen tai parittoman luvun summa on aina parillinen.

2.3 Asteittaisuusehto

Tarkastellessa yleisiä länsimaisen taidemusiikin historiassa käytettyjä asteikkoja on huomattavissa asteikkojen rakenteiden perustuvan useissa tapauksissa perättäisten koko- ja puoliaskelien eli sävelintervallien yksi ja kaksi vaihtelulle niin, että lopullinen asteikko ei sisällä lainkaan kahta perättäistä sävelintervallia yksi. Tästä johtuen, eivät perinteisesti yleiset asteikot sisällä osajoukkona lainkaan joukkoa $[0\ 1\ 2]$. Edellä kuvatun kaltaisia yleisiä asteikkoja ovat esimerkiksi diatoninen, oktatoninen, akustinen ja napolilainen duuriasteikko (Persichetti 1961, 43-44).



Kuva 2.1 diatoninen, oktatoninen, akustinen ja napolilainen duuriasteikko.

Tästä historiallisesta perinteestä johtuen myös tässä tutkielmassa asetetaan asteikkojen generoimisessa asteikkojen muodostamiselle *asteittaisuusehto*. Tämä tarkoittaa sitä, että generoitavien asteikkojen täydennysjoukot tulee olla muodoltaan sellaisia, että ne eivät sisällä kahta perättäistä puoliaskelta eli sävelintervallia yksi. Täydennysjoukkojen tulee olla muodoltaan myös sellaisia, että ne eivät sisällä hyppyjä tarkoittaen sävelintervallia kolme (p3) ja sitä suurempia intervaleja. Kahden perättäisen puoliaskelen ilmentyminen on kuitenkin hyväksyttävää silloin, kun se esiintyy jakovälien aloitussävelien ympärillä. Näitä paikkoja kutsutaan yleisesti termillä *jakosävel*. Asteittaisuusehdon asettamisen peruste on myös olennaisesti asteikkojen generointimahdollisuuksien rajaaminen, sillä vaihtoehtoja muuten jakovälien täydentämiseen olisi valtavasti.

2.4 Jakointervallin parillisuus-/parittomuusehto

Kun jakovälejä aletaan täydentää, on täydennys riippuvainen siitä, kuinka suuri jakovälin jakointervalli on. Olennaisinta on hahmottaa, onko jakointervallin sävelintervalli parillinen vai pariton. Jos jakointervallin sävelintervalli on parillinen, tulee tällöin täydennysjoukkoon

sisällyttää jakointervallin kaksi keskimmäistä säveltä erottaen joukon x ylä- ja alapuoliset osajoukot yA ja yB sävelintervallilla yksi (p2). Tämä johtuu siitä, että muuten täydennysjoukon inversionaalisymmetrisyysehto tai asteittaisuusehto ei voi täytyä. Esimerkiksi jos täydennysjoukon x äärisävelet ovat c^1 ja a^1 , ovat sen keskimmäiset sävelet e^1 ja f^1 . Mikäli näistä sävelistä valitaan vain toinen, seuraa tilanne, jossa täydennysjoukon x ylä- ja alapuoliset osajoukot yA ja yB eivät ole yhtä laajoja. Täten inversionaalisymmetrisyysehto ei voi täytyä. Jos taas kumpaakaan keskimmäisistä sävelistä ei valita, syntyy hyppy eikä täten asteittaisuusehto voi täytyä.

Jos jakointervallin sävelintervalli on pariton, on jakointervallin keskimmäinen sävel välitettävä erottamalla joukon x ylä- ja alapuoliset joukot yA ja yB intervalliluokalla kaksi (s2). Edellinen on seurausta siitä, että jakointervallin keskimmäisen sävelen sisällyttäminen täydennysjoukkoon jakaa jakointervallin kahtia puolittaen alun perin valitun jakointervallin suuruuden ja täten myös kaksinkertaistaen jakovälien määrän.

On kuitenkin tärkeää havaita, että määritettäessä jakointervallien parillisuutta tai parittomuutta on kriittistä huomata, että sävelintervallien parillisuudet sekä parittomuudet menevät juuri päinvastoin kuin numeroissa perinteisesti. Täten jakointervallien numeerista suuruutta tarkastellessa kooltaan parilliset sävelintervallit ovat parittomia, ja parittomat parillisia. Tämä johtuu siitä, että sävelintervallien listaaminen alkaa luvusta nolla, jolloin tietty sävelintervalli i sisältää luvusta nolla katsottuna $i + 1$ lukua. Esimerkiksi sävelintervalli kahdeksan sisältää nolasta alkaen $8 + 1 = 9$ lukua. Täten esimerkiksi sävelintervalli kahdeksan on pariton, ei parillinen, intervalli jakointervallin laajuutta tarkastettaessa.

3 Asteikkojen generointi

Kun välttämättömät asteikkojen generointiin liittyvät käsitteet sekä siihen riittävän laajasti rajaavat ehdot ovat määritetty, on mahdollista alkaa generoida itse monioktaavisia symmetrisiä sekä sävelavaruudeltaan uudistuvia asteikkoja. Edelleen ongelmana kuitenkin on, että vaihtoehtoja jakaa kutakin oktaavien lukumääriä on niin paljon, ettei niitä kaikki voi tai ole edes järkevää käsitellä. Siitä syystä tutkimuksen kohteeksi valitaan sellaiset tasaoktaavien lukumäärät sekä jakovälien jakointervallit, jotka ovat kategorioissaan ominaisuuksiltaan uniikkeja.

Ainutlaatuisia oktaavien lukumääriä ovat laajuudeltaan suuremmat kuin yhden oktaavin kokonaisuudet, mitkä ovat tasaoktaavien lukumäärältään jonkun alkuluvun mukaisia. Luku on alkuluku, jos se on jaollinen vain luvulla yksi tai itsellään (Hardy ja Wright 1938, 8). Kyseiset tapaukset ovat tietyiltä ominaisuuksiltaan ainutlaatuisia, koska kun oktaavien lukumäärä on jonkun alkuluvun mukainen, voidaan varmistua siitä, ettei se ole jonkun aiemman tasaoktaavien lukumäärän monikerta. Luvussa 2.1 käsitellyistä oktaavien lukumääristä alkuluvun mukaisia ovat tasaoktaavien lukumäärät 2, 3, 5 ja 7.

Toisaalta, koska yhtä oktaavia voidaan jakaa jakointervalleiltaan kuuteen eri vaihtoehtoon sävelintervalleiltaan 1, 2, 4, 6, ja 12, on luonnollista valita oktaavien lukumäärissä 2, 3, 5 ja 7 käsiteltäväksi sellaiset jakointervallien suuruudet, mitkä eivät sisälly yhteen oktaaviin. Näitä jakointervallien vaihtoehtoja ovat sävelintervallit 5, 7, 8, 9, 10 ja 11. Kun tarkastellaan luvun 2.1 taulukon 2.3 erilaisia mahdollisuuksia jakaa eri oktaavien lukumääriä, huomataan, että lukumäärältään 2, 3, 5 ja 7 oktaavia sisältävät jokainen ainakin yhden näistä uniikeista jakointervallien vaihtoehtoista:

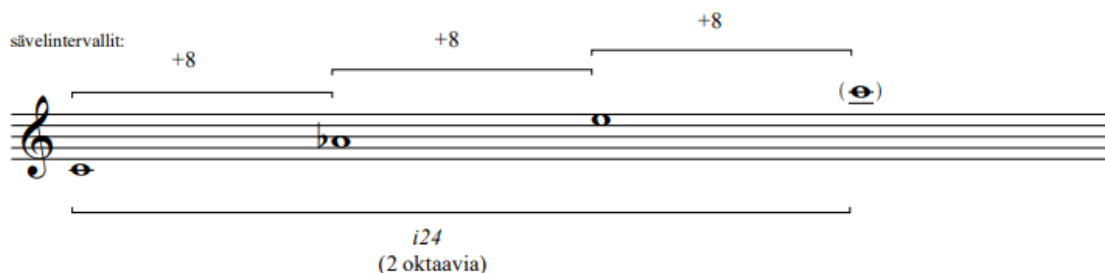
oktaavien lukumäärä	jakovälien määrä	jakointervalli
2	3	8
3	4	9
5	12	5
7	12	7
5	6	10

Taulukko 3.1 Uniikit oktaavien lukumäärät sekä niille ominaiset jakointervallit.

Nyt suuresta määrästä eri oktaavien jaollisuusmahdollisuuksista on jäljelle jäänyt vain viisi. Näistä viidestä tapauksesta tarkempaan käsittelyyn valitaan 2:n ja 3:n oktaavin jakointervalliltaan ainutlaatuiset tapaukset. Alaluvuissa 3.1 ja 3.2 suoritetaan lopullinen asteikkojen generointi 2:lle ja 3:lle oktaaville luvussa 2 määritettyjen ehtojen mukaisesti.

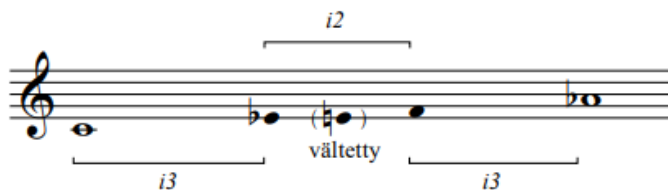
3.1 2:n oktaavin asteikko

2:n oktaavin asteikon generoimiseen valitaan jaollisuusvaihtoehdoista tilanne, jossa jakovälin määrä on kolme ja tätä vastaava jakointervallien suuruus on sävelintervallin kahdeksan mukainen. Kun asteikon rakentaminen aloitetaan sävelestä c^1 , saadaan asteikon rungoksi ja jakosäveliksi kuvan 3.1 mukainen tilanne.



Kuva 3.1 2:n oktaavin asteikon runko ja jakosävelet.

Koska 2:n oktaavin asteikossa käytetty jakointervallin suuruus kahdeksan on luvussa 2.4 tehdyn määritelmän mukaan pariton, täytyy myös luvussa 2.4 määritetyn parillisuus-/parittomuusehdon mukaan jakointervallin keskimmäinen sävel välttää. Tästä seuraa kuvan 3.2 mukainen tilanne.



Kuva 3.2

Nyt jakovälin lopulliseen täydentämiseen olevia täydennysjoukkojen vaihtoehtoja, jotka täydentävät luvussa 2.3 määritetyn asteittaisuusehdon, on neljä. Nämä neljä täydennysjoukon vaihtoehtoa havainnollistetaan kuvassa 3.3.

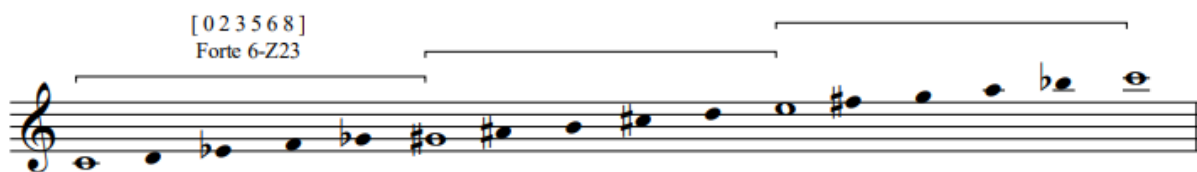


Kuva 3.3 (Straus 1990, 264)

Näistä neljästä täydennysjoukon vaihtoehdosta kuitenkin vain kaksi ovat sellaisia, jotka täydentävät myös luvussa 2.2 määritetyn täydennysjoukon inversionaalisymmetrisyysehdon. Ne ovat vaihtoehdot 2 ja 3. Näistä kahdesta kuitenkin vaihtoehto 2 eli joukko $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ luo lopullisessa asteikossa sävelavaruudeltaan rikkaamman lopputuloksen, eli viime kädessä muodostuva asteikko sisältää enemmän eri sävelluokkia ja vähemmän yksittäisten sävelluokkien kaksintumista. Kyseinen joukko onnistuu myös välttämään kahden perättäisen sävelintervallin yksi esiintymisen jakosävelten ympäristössä. Alla esitetään joukon $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ tiedot, joista selviää muun muassa joukon inversionaalisymmetriset ominaisuudet (Straus 1990, 264).

<i>P R I R I</i>	joukko	forte	vektori	
0 1 0 1	$[023568]$	6-Z23	$\langle 234222 \rangle$	1, 1

Kun kaikki kahden oktaavin kolme jakoväliä täytetään joukon $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ mukaisesti, lopulliseksi 2:n oktaavin asteikoksi muodostuu 15 sävelinen kuvan 3.4 mukainen asteikko.



Kuva 3.4 2:n oktaavin asteikko

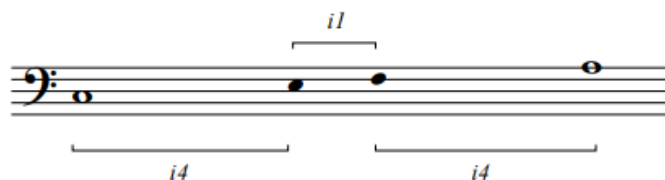
3.2 3:n oktaavin asteikko

3:n oktaavin asteikkoon valitaan jaollisuusvaihtoehtoista jakovälien määräksi neljä, jolloin yksittäisen jakointervallin laajuus on sävelintervallin yhdeksän mukainen. Kun asteikon rakentaminen aloitetaan sävelestä c, asteikon rungoksi ja jakosäveliksi saadaan kuvan 3.5 mukainen rakenne.



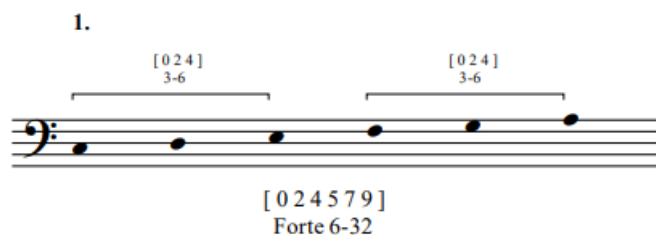
Kuva 3.5 3:n oktaavin asteikon runko ja jakosävelet.

Koska 3:n oktaavin asteikossa käytetty jakointervalli yhdeksän on parillinen, täytyy luvussa 2.4 määritetyn parillisuus-/parittomuusehdon mukaan jakointervallin keskimmäiset sävelet sisällyttää täydennysjoukkoon. Tästä seuraa kuvan 3.6 mukainen tilanne.



Kuva 3.6

Nyt jakovälin lopulliseen täydennykseen olevia täydennysjoukon vaihtoehtoja, jotka täydentävät luvussa 2.2 määritetyn täydennysjoukon inversionaalisymmetrisyysehdon sekä luvussa 2.3 määritetyn asteittaisuusehdon, on ainoastaan kuvassa 3.7 esitetty heksakordi [0 2 4 5 7 9].



Kuva 3.7 (Straus 1990, 264)

Alla esitetään joukon [0 2 4 5 7 9] tiedot, joista selviää muun muassa joukon inversionaalisymmetriset ominaisuudet (Straus 1990, 264).

$PRI RI$	joukko	forte	vektori
1 1 1 1	[024579]	6-32	<143250> 1, 1

Kun kaikki kolmen oktaavin neljä jakoväliä täytetään joukon [0 2 4 5 7 9] mukaisesti, lopulliseksi 3:n oktaavin asteikoksi muodostuu kuvan 3.8 mukainen 20 sävelinen asteikko.



Kuva 3.8 3:n oktaavin asteikko

4 Asteikkojen ominaisuudet

Luvussa 3 saadaan varsinainen tulos johdannossa esitettyyn päämäärään monioktaavisten asteikkojen generoimisesta. Tutkielman viimeisenä osana on kuitenkin vielä tärkeää analysoida luvussa 3 generoitujen asteikkojen ominaisuuksia. Analyysi on olennaista, sillä se antaa vastauksen johdannossa esitettyjen tavoitteiden toteutuvuudesta asteikkojen ominaisuuksien suhteen. Tämän lisäksi analyysi antaa mahdollisuuden peilata generoituja monioktaavaisia asteikkoja muihin yleisiin asteikkorakenteisiin. Seuraavissa alaluvuissa määritetään generoitujen asteikkojen yleisiä ominaisuuksia, jotka voidaan kategorisoida kolmeen pääluokkaan: asteikkojen sävelavaruudellinen laajuus, asteikkojen transpositionaaliset mahdollisuudet, sekä asteikkojen soinnilliset ominaispiirteet. Ensimmäisessä kategoriasa tarkastellaan yksinkertaisuudessaan asteikkojen sisältämää kokonaissävelmää, sekä kuinka paljon sävelluokkien uusiutumista ja toistuvuutta ilmenee.

Toisessa ja suurimmassa kategoriassa tarkastellaan kuinka monta sävelsisällöltään erilaista transpositiota kullakin asteikolla on ja kuinka monella tapaa kukin poikkeava transpositio voi asemoitua sävelavaruuteen. Transposition *asemilla* tarkoitetaan asteikon sellaista transpositiota, jossa asteikon sijainti sävelavaruudessa muuttuu suhteessa transpositioon T_n , mutta sen sisältämät täydennysjoukot sekä jakosävelet pysyvät sävelluokiltaan identtisinä transposition T_n kanssa. Erilaisten transpositioiden määrää tarkastellessa huomioidaan kukin asteikko ainoastaan sen päämuodossa, eli kunkin asteikon erilaisia moodeja ei katsota asteikon eri transpositioiksi.

Tämän lisäksi toisessa kategoriassa analysoidaan kunkin asteikon *transponoinnin rajat* sekä *etäisten transpositioiden* paikat suhteessa ennalta määritettyyn transpositioon T_n . Asteikon transponoinnin rajoilla tarkoittaa suppeinta akselia asteikon transposition T_n ympäriltä, jolla esiintyy kaikki asteikon eri transpositioiden aloituspisteet sekä niiden asemat. Asteikon etäisellä transpositiolla tarkoitetaan sellaista transpositiota, joka täydentää 12-sävelavaruuden transposition T_n kanssa, eli etäinen transpositio sisältää transposition T_n sävelkroomasta puuttuvat sävelluokat. Asteikkojen transpositionaalisten ominaisuuksien määrittäminen on olennaista, koska se antaa yleisesti tärkeää tietoa asteikkojen luonteesta sijoittua sävelavaruuteen.

Kolmannessa kategoriassa tarkastellaan teknisesti kuinka monioktaaviset asteikot suhtautuvat muihin yleisiin asteikkorakenteisiin kuten oktatoniseen, kokosäveliseen ja diatoniseen. Luvussa 4 asteikkojen ominaisuuksia määritettäessä asteikkoja ei käsitellä oman pienimmän laajuutensa abstraktiossa, vaan asteikkojen katsotaan jatkuvan rakenteidensa mukaisesti sävelavaruuden molempiin suuntiin.

4.1 2:n oktaavin asteikon ominaisuudet

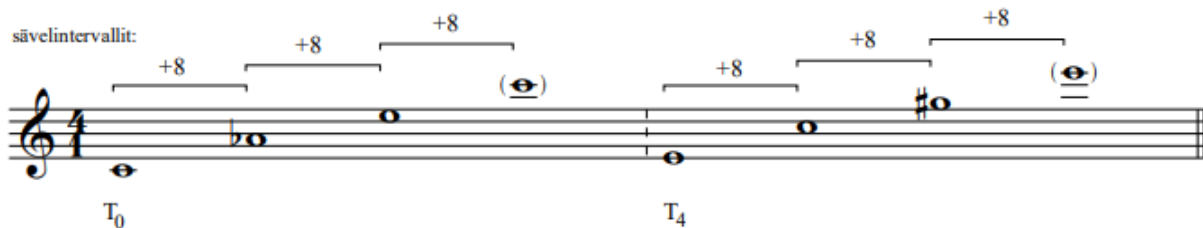
Luvussa 3.1 generoitu 2:n oktaavin asteikko sisältää kokonaisuudessaan 15 säveltä. Havainnollistavampaa on kuitenkin ilmaista, että 2:n oktaavin asteikko sisältää $12 + 3$ säveltä, mikä tarkoittaa asteikon sisältävän sävelkrooman jokaisen sävelluokan ainakin kerran, ja joista kolme kaksintuu asteikon sisällä. Täten johdannossa asetettu tavoite sävelavaruuden uudistumisesta toteutuu: asteikko sisältää suurimman mahdollisen määrän eri sävelluokkia, mutta pienimmän mahdollisen määrän kaksintuvia sävelluokkia ja kaikki kaksintuvat sävelluokat ovat eri sävelluokkia. Asteikon sisäiset kaksintuvat sävelluokat ovat asteikon 2., 5. ja 7. sävelet, joita sävelluokaltaan vastaavat sävelet ovat asteikon 10., 12. ja 15. sävelet (sävelluokallinen vastaavuus: $2. = 10.$, $5. = 12.$ ja $7. = 15.$). Sävelluokkien kaksintuminen tapahtuu aina oktaavin päässä, ja kyseiset sävelet muodostavat jatkuvan joukosta $[0\ 4\ 8]$ muodostuvan rungon 2:n oktaavin asteikon sisälle.



Kuva 4.1 2:n oktaavin asteikon sävelet numeroituina, sen sisältämät toistuvat sävelet sekä niistä muodostuva joukon $[0\ 4\ 8]$ mukainen jatkuva runko kun asteikon transpositio on $T_0 = c^1$.

Seuraavaksi määritetään kuinka monta erilaista transpositiota, ja kuinka monta erilaista asemaa kullakin transpositiolla 2:n oktaavin asteikossa on. Luvussa 3.1 määritetään, että 2:n oktaavin asteikon täydennysjoukko on joukon $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ mukainen. Samassa luvussa esitettyjen heksakordin ominaisuuksien (Straus 1990, 264) perusteella voidaan todeta, että joukolla $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ on 12 transpositiota, koska se voi kartoittua itsensä päälle vain yhdellä T_n tai $T_n I$. Koska täydennysjoukko esiintyy kolme kertaa 2:n oktaavin asteikossa, on asteikolla kokonaisuudessaan $12/3 = 4$ toisistaan poikkeavaa transpositiota.

2:n oktaavin asteikon tapauksessa jokainen erilainen transpositio voi myös asemoitua sävelavaruuteen kahdella eri tavalla niin, että sen sisältämät täydennysjoukot sekä jakosävelet pysyvät sävelluokiltaan identtisinä suhteessa transpositioon T_n , vaikka asteikon sijainti sävelavaruudessa muuttuu. Asteikon jokaisella neljällä transpositiolla on siis kaksi asemaa, ja niiden asemoituminen sävelavaruuteen suhteessa toisiinsa ovat transpositioiden T_n ja $T_{n\pm 4}$ mukaiset. Kuvassa 4.2 havainnollistetaan tietyn 2:n oktaavin asteikon transposition kahta mahdollisuutta asemoitua sävelavaruuteen asteikon jakosävelten avulla.



Kuva 4.2 2:n oktaavin asteikon jakosävelten molemmat kaksi tapaa asemoitua sävelavaruuteen kun $T_0 = c^1$.

2:n oktaavin asteikon transponoinnin suhteen selvitetään vielä kuinka suurella akselilla asteikkoa voidaan transponoida, eli mitkä ovat asteikon transponoinnin rajat. Tämän lisäksi määritetään mitkä asteikon transpositioista ovat sävelavaruudeltaan etäisiä suhteessa asteikon transpositioon T_n , eli mitkä ovat asteikon etäiset transpositiot. Jotta tietyn asteikon transponoinnin rajat ovat mahdollista selvittää, täytyy aluksi ymmärtää monioktaavisten asteikkojen symmetrisistä ominaisuuksista johtuva *transpositioiden vastaavuus*. Tämä tarkoittaa sitä, että tietyn asteikon tietyille transpositioille pätee sävelavaruudellinen identtisyys, eli tietyt asteikkojen transpositiot T_n ja T_m ovat sama asteikko. Esimerkiksi 2:n oktaavin asteikon tapauksessa, jos transpositiota T_n transponoidaan kahdeksan askelmaa ylöspäin, saavutaan sellaiseen aloituspisteeseen, joka on täysin vastaava transposition T_n kanssa johtuen asteikon symmetrisestä rakenteesta. Täten asteikon transpositiot T_n ja T_{n+8} ovat sama asteikko. Vastaavasti taas jos asteikon transpositiota T_n transponoidaan viisi askelmaa ylöspäin, on se sama asia kuin transponoitaisiin asteikon samaa transpositiota kolme askelmaa alaspäin. Täten asteikon transpositioille T_{n+5} ja T_{n-3} pätee transpositioiden vastaavuus.

Monioktaavisten asteikkojen transpositioiden vastaavuus on yleistettävissä. Tietyn asteikon transpositioille T_n ja T_m pätee transpositioiden vastaavuus mikäli transpositio asteet n ja m ovat kongruentteja toisilleen asteikon jakointervallin I modulona (luvuilla n ja m on sama jakojäännös jaettuna luvulla I):

$$T_n = T_m \quad \text{jos} \quad n \equiv m \pmod{I}, \quad \text{jossa } I \text{ on asteikon jakointervalli} \quad (4)$$

Transpositioiden vastaavuuden hahmottaminen on tärkeää, jotta ymmärretään, että osa asteikon transpositioista on lähempänä alkuperäistä asemaa alakautta kuin yläkautta transponoitaessa. Tämä ilmenee muun muassa yllä esitetyssä esimerkissä. Raja, johon on lähempi transponoida yläkautta kuin alakautta on asteikon jakointervallin I puolivälissä, mikä täten määrittää myös ehdot asteikon transponoinnin rajoille. Asteikon transponoinnin rajat suhteessa asteikon jakointervallin I laajuuteen ovat:

$$\pm \frac{I}{2} \quad \text{kun } I \text{ on parillinen,} \quad \text{tai} \quad \pm \frac{I-1}{2} \quad \text{kun } I \text{ on pariton} \quad (5)$$

Edellä olevissa kaavoissa on kuitenkin tärkeää huomioida, ettei niihin päde luvussa 2.4 määritetty poikkeavuus parillisten ja parittomien lukujen suhteen. Yllä mainituissa kaavoissa parillinen luku on muotoa $2k, k \in \mathbb{Z}$ ja pariton luku muotoa $2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, mitkä ovat yleiset parillisen ja parittoman luvun määritelmät. Luvun parillisuus täytyy huomioida kaavassa, koska transponoinnin rajojen täytyy olla kokonaislukujen mukaisia. 2:n oktaavin asteikon jakointervalli on parillinen intervalli kahdeksan. Täten asteikon transponoinnin rajat ovat: $\pm 8/2 = \pm 4$, eli $T_{n-4} - T_{n+4}$.

Asteikon etäisten transpositioiden määrittäminen aloitetaan selvittämällä asteikosta puuttuvat sävelkrooman sävelet. Asteikkojen symmetrisistä ominaisuuksista johtuen on riittävä, että asteikkojen transponointiin liittyviä ominaisuuksia tarkastellaan jonkun tietyn täydennysjoukon ympäristössä riippumatta tarkasteltavasta asteikosta. 2:n oktaavin asteikon täydennysjoukko on joukon $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$ mukainen. Suhteutettuna täyteen sävelkroomaan kyseisestä täydennysjoukosta puuttuu kolme säveltä, jotka yhdessä muodostavat joukon $[0\ 3\ 6]$ mukaisen kokonaisuuden.



Kuva 4.3 2:n oktaavin asteikon täydennysjoukko $[0\ 2\ 3\ 5\ 6\ 8]$, sekä sen puuttuvista sävelistä muodostuva joukko $[0\ 3\ 6]$ kun $T_0 = c^1$.

Etäisten transpositioiden on asetuttava sävelavaruuteen niin, että kaikki transposition T_n sävelavaruudesta puuttuvat sävelet esiintyvät. Tämä onnistuu niin, että aluksi määritetään puuttuvista sävelistä muodostuvan joukon sijainnit transpositiossa T_n tietyn täydennysjoukon ympäristössä. Tämän jälkeen määritetään kuinka paljon puuttuvista sävelistä muodostuvia joukkoja tulee transponoida, jotta ne täydentävät transposition T_n sävelkrooman. 2:n oktaavin asteikon tapauksessa puuttuvista sävelistä muodostuva joukko $[0\ 3\ 6]$ esiintyy yhden täydennysjoukon ympäristössä neljällä tavalla, jotka havainnollistetaan kuvassa 4.4.



Kuva 4.4 joukon $[0\ 3\ 6]$ neljä esiintymistä 2:n oktaavin asteikon yksittäisen täydennysjoukon ympäristössä kun $T_0 = c^1$.

Jokainen yllä esitetystä neljästä joukosta transponoituna vastaavaan transpositiosta T_n puuttuvien sävelten muodostamaan joukkoon, saadaan asteikon etäisiksi transpositioiksi suhteessa T_n transpositiot: T_{n-4} , T_{n-1} , T_{n+1} ja T_{n+4} . Transpositioiden vastaavuudesta johtuen on kuitenkin huomioitava, että transpositiot T_{n-4} ja T_{n+4} ovat sama asteikko, eli 2:n oktaavin asteikolla on kokonaisuudessaan kolme etäistä transpositiota.

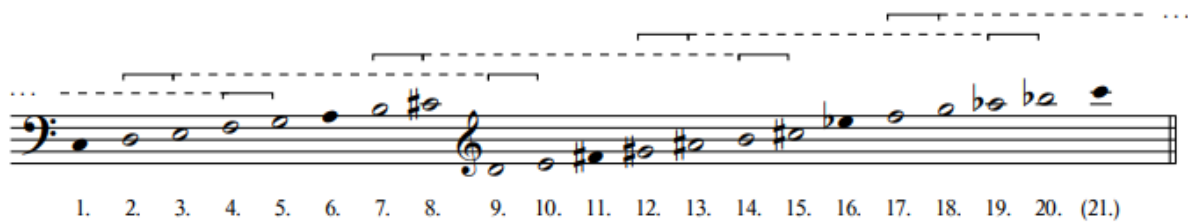
Viimeisenä 2:n oktaavin asteikon ominaisuuksista määritetään teknisesti sen vastaavuutta muihin yleisiin asteikkorakenteisiin. Kyseinen asteikko sisältää paljon rakenteellista vastaavuutta diatonisen sekä oktattonisen asteikon kanssa. 2:n oktaavin asteikkoon sisältyy kolme kertaa aiolinen molliasteikko, joiden transpositiot toisiinsa suhtautuvat 2:n oktaavin asteikon jakointervallin kahdeksan (p6) mukaisesti. Tämän lisäksi kyseiseen asteikkoon sisältyy kolmesti oktattonisen asteikon kuusisävelinen osajoukko [0 2 3 5 7 8], joiden transpositiot toisiinsa suhtautuvat myöskin sävelintervallin kahdeksan mukaisesti.



Kuva 4.5 2:n oktaavin asteikon sisältämät katkelmat muista yleisistä asteikkorakenteista, kun 2:n oktaavin asteikon transpositio on $T_0 = c^1$.

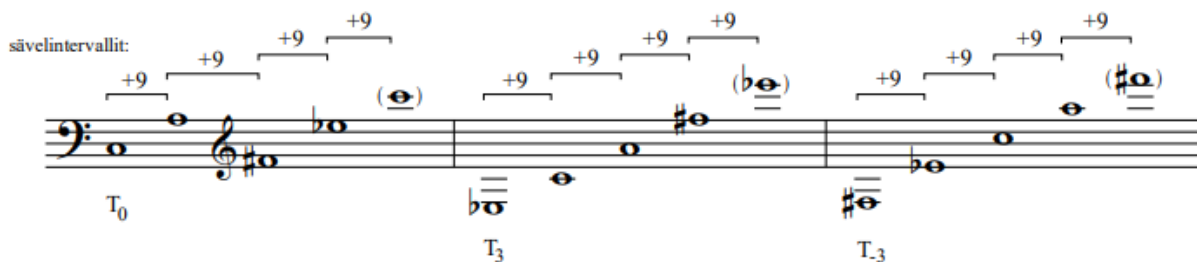
4.2 3:n oktaavin asteikon ominaisuudet

Luvussa 3.2 generoitu 3:n oktaavin asteikko sisältää $12 + 8$ säveltä, eli asteikossa esiintyvät kaikki sävelavaruuden 12 sävelluokkaa, joista kahdeksan kaksintuu asteikon sisäisesti. Kokonaisuudessaan asteikossa on täten 20 säveltä. Tavoite sävelavaruudellisesta uudistumisesta toteutuu myös 3:n oktaavin asteikon kohdalla, koska se sisältää suurimman mahdollisen määrän eri sävelluokkia, sekä pienimmän mahdollisen määrän kaksintuvia eri sävelluokkia. Kaksintuvat sävelluokat ovat asteikon 2., 3., 4., 5., 7., 8., 12. ja 13. sävelet, joiden vastaavuus sävelluokittain on $2. = 9.$, $3. = 10.$, $4. = 17.$, $5. = 18.$, $7. = 14.$, $8. = 15.$, $12. = 19.$ sekä $13. = 20.$ Sävelluokkien kaksintumista sekä rekisteriin sijoittumista havainnollistetaan kuvassa 4.6.



Kuva 4.6 3:n oktaavin asteikon sävelet numeroituna, sekä havainnollistus kaksintuvien sävelten toistuvuudesta sekä sijoittumisesta sävelvaruuteen kun asteikon transpositio on $T_0 = c$.

Luvussa 3.2 määritetään, että 3:n oktaavin asteikon täydennysjoukko on joukon $[0\ 2\ 4\ 5\ 7\ 9]$ mukainen, ja että kyseinen joukko voi kartoittua itsensä päälle vain yhdellä T_n tai $T_n I$. Koska täydennysjoukko esiintyy 3:n oktaavin asteikossa neljä kertaa, on asteikolla kokonaisuudessaan $12/3 = 4$ toisistaan poikkeavaa transpositiota. Jokaisella neljällä erilaisella transpositiolla 3:n oktaavin asteikossa on kolme asemaa. Niiden sijainnit sävelvaruudessa suhteutettuna toisiinsa ovat T_{n-3} , T_n ja T_{n+3} . Kuvassa 4.7 esitetään 3:n oktaavin asteikon tietyn transposition asemat.



Kuva 4.7 3:n oktaavin asteikon jakosävelten kaikki kolme tapaa asemoitua sävelvaruuteen kun $T_0 = c$.

3:n oktaavin asteikon jakointervallin suuruus on sävelintervallin yhdeksän (s_6) mukainen. Koska luku on pariton, luvussa 4.1 määritetyn laskukaavan (5) mukaisesti asteikon transponoinnin rajat ovat: $\pm(9 - 1)/2 = \pm 4$, eli $T_{n-4} - T_{n+4}$. Asteikon täydennysjoukko on joukon $[0\ 2\ 4\ 5\ 7\ 9]$ mukainen, mistä suhteutettuna täyteen sävelkroomaan puuttuu neljä säveltä. Puuttuvat sävelet muodostavat yhdessä joukon $[0\ 2\ 5\ 7]$.



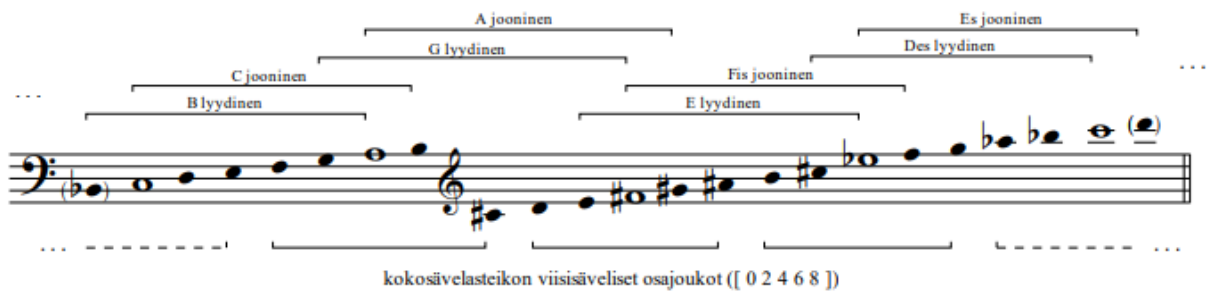
Kuva 4.8 3:n oktaavin asteikon täydennysjoukko $[0\ 2\ 4\ 5\ 7\ 9]$, sekä sen puuttuvista sävelistä muodostuva joukko $[0\ 2\ 5\ 7]$ kun $T_0 = c^1$.

3:n oktaavin asteikon täydennysjoukon puuttuvien sävelten mukainen joukko $[0\ 2\ 5\ 7]$ esiintyy asteikon yhdessä täydennysjoukossa kahdella eri tavalla, mitkä havainnollistetaan kuvassa 4.9. Kyseiset joukot transponoituna vastaavaan transpositiosta T_n puuttuvien sävelten muodostamaan joukkoon selviää, että asteikon etäiset transpositiot ovat: T_{n-1} ja T_{n+1} . 3:n oktaavin asteikolla on täten kaksi etäistä transpositiota.



Kuva 4.9 joukon $[0\ 2\ 5\ 7]$ molemmat kaksi esiintymistä 3:n oktaavin asteikon yksittäisen täydennysjoukon ympäristössä kun $T_0 = c^1$.

Teknisesti 3:n oktaavin asteikko sisältää runsaasti yhteneväisyyksiä diatonisen sekä kokosävelasteikon kanssa. Asteikkoon sisältyy neljästi sekä lyydinen että jooninen moodi. Lyydisten sekä joonisten moodien transpositionaalinen suhde toisiinsa on 2:n oktaavin asteikon tapaan verrannollinen jakointervallin suuruuteen, mikä 3:n oktaavin asteikon tapauksessa on sävelintervallin yhdeksän (s_6) mukainen. Diatonisten moodien lisäksi kyseinen asteikko sisältää neljä kertaa kokosävelasteikon viisisävelisen osajoukon $[0\ 2\ 4\ 6\ 8]$, joiden transpositiot suhteessa toisiinsa pohjautuvat myöskin jakointervalliin yhdeksän. Diatonisten moodien sekä oktattonisen asteikon osajoukkojen sijoittumista asteikkoon havainnollistetaan kuvassa 4.10.



Kuva 4.10 3:n oktaavin asteikon sisältämät katkelmat muista yleisistä asteikkorakenteista, kun 3:n oktaavin asteikon transpositio on $T_0 = c$.

5 Yhteenveto

Tutkimuksessa generoidut 2:n ja 3:n oktaavin asteikot sisältävät ominaisuuksiltaan toisilleen paljon samaa. Molempien asteikkojen transponoinnin rajat ovat T_{n-4} - T_{n+4} sekä molemmilla asteikoilla on etäinen transpositio transpositioilla T_{n-1} ja T_{n+1} . Molemmat asteikot sisältävät runsaasti diatonisia katkelmia. Toisaalta siinä missä 2:n oktaavin asteikko sisältää oktatonisuutta, 3:n oktaavin asteikko sisältää kokosävelisyyttä. Edelleen, kun 2:n oktaavin jakosävelet ovat rekisterillisesti supistettuna syklisen ylinousevan kolmisoinnun mukainen joukko [0 4 8], ovat tälle kontrastina 3:n oktaavin asteikon jakosävelet rekisterillisesti supistettuna syklisen vähennetyin dimiseptimisoinnun mukainen joukko [0 3 6 9]. Viimeisenä, ja tärkeimpänä, molemmat asteikot täyttävät alussa asetetun päämäärän asteikkojen rekisterillisestä laajuudesta, symmetrisyydestä sekä sävelavaruudellisesta uudistumisesta.

Työn tutkimuksellinen intressi pohjautuu sen luomiin mahdollisuuksiin sävellykselliseen työskentelyyn sekä musiikkianalyysiin. Kuten johdannossa todetaan, inspiraatio tutkimuksen aiheeseen syntyi ensimmäisen kerran sävellysohjeiden parissa. Tämän jälkeen tutkimuksessa esitetyistä asteikoista sekä sen menetelmiä soveltaen luoduista sävelrakenteista on tullut tärkeä osa henkilökohtaista työskentelyäni sävellyksen parissa. Musiikkianalyysin kannalta, kun tutkimuksessa esitettyjä generointimenetelmiä sovelletaan tasaoktaavien lukumäärältään seitsemän oktaavin laajuiseen tapaukseen, saadaan asteikkorakenne, joka esiintyy muun muassa Magnus Lindbergin tuotannossa tarjoten ymmärrystä säveltämisestä käytännön käyttämisestä rakenteista. Esimerkiksi Lindbergin *Viulukonserton nro 1* (2006), tahtien 1-20 sävelmateriaali noudattaa täsmällisesti tutkielmassa esitettyjen menetelmien avulla luotavaa asteikkoja. Vastaavasti Lindbergin teoksessa *Tempus fugit* (2017), on useasti havaittavissa samaan, tutkimuksen menetelmiä soveltaen saatavaan, 7:n oktaavin asteikkoon pohjautuvia katkelmia.

Kuitenkin, tämä työ on vain pintapuolinen katsaus asteikkojen generoinnin teemaan, missä olisi valtavasti potentiaalia suurempaan tutkimukseen. Luvussa 2.1 esitellyistä eri oktaavien lukumäärien jaollisuusmahdollisuuksista lopulliseen käsittelyyn eteni vain kaksi tapausta, minkä johdosta myös lopulliseen käsittelyyn tasaoktaavien lukumäärästä etenevät vain 2:n ja 3:n oktaavin laajuiset tapaukset. Tätä tutkimusta varten luvussa 2 asetetut ehdot asteikkorakenteiden täydentämiseksi määritettiin tietoisesti tarkoin ja rajaa-vasti aihealueen riittävän rajaamisen turvaamiseksi. Ehtojen asettaminen voisi kuitenkin olla merkittävästi rajoja vähemmän määrittäviä, kuten Persichetti (1961, 48-49) toimii, yllättävimpien sekä poikkeuksellisempien lopputulosten saavuttamiseksi. Jo ainoastaan johdannossa asetettujen asteikkojen ominaisuuksien lähtökohdat rekisterillisestä laajuudesta, sävelavaruudellisesta uudistumisesta sekä symmetrisyydestä olisi mahdollista asettaa lopullisen päämäärän kannalta avoimemmin. Ei ole myöskään vaadittavaa, että asteikkojen generoinnin tulisi tapahtua ainoastaan tasaviereisessä 12-sävelavaruudessa. Yksinkertaisesti ilmaistuna: asteikkojen generoinnille on lähes äärettömät mahdollisuudet. Täten teeman syvemmälle tutkimukselle on valtavasti syytä, koska sen luomissa mahdollisuuksissa musiikilliseen luomistyöhön voi piillä suunnaton potentiaali.

Lähteet

Hardy, Godfrey H. ja Edward M. Wright. 1938. *An Introduction to the Theory of Numbers*. London: Oxford University Press.

Persichetti, Vincent. 1961. *Twentieth-Century Harmony: Creative Aspects and Practice*. New York: W.W.Norton & Company, Inc.

Straus, Joseph N. 1990. *Introduction to Post-Tonal Theory*. New Jersey: Pearson Education, Inc.

Asiahakemisto

asema 13

etäinen transpositio 13

jakointervalli 4

jakosävel 7

jakoväli 4

oktaaviluku 3

transponoinnin rajat 13

transposition vastaavuus 15

täydennysjoukko 6